ZUR
ENTWICKLUNGSGESCHICHTE
DES
FUNKTIONSBEGRIFFS.

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE
DER
HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
ZU BASEL
VORGELEGT VON

RUDOLF WETH
AUS BASEL.

BASEL
BUCHDRUCKEREI EMIL BIRKHÄUSER
1891.

ZUR

ENTWICKLUNGSGESCHICHTE

DES

FUNKTIONSBEGRIFFS.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

ZU BASEL

VORGELEGT VON

RUDOLF WETH

AUS BASEL.

BASEL

BUCHDRUCKEREI EMIL BIRKHÄUSER

1891.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548817_0074

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinen hochverehrten Lehrern, insbesondere den Herren Professoren H. Kinkelin, E. Hagenbach-Bischoff und A. Riggenbach für die vielfache Anregung, die ich bei meinem Studium durch sie empfangen habe, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

In den ersten Spuren menschlicher Kultur begegnen wir schon den rohesten Anfängen mathematischen Denkens. Der Begriff der Vielheit, oder der Zahlenbegriff, ist nicht das Produkt einer langandauernden geistigen Arbeit; es ist der von der Natur bereits gegebene Begriff der diskreten Mannigfaltigkeit, welcher sich uns als eine Anzahl von Bewusstseinsinhalten offenbart.[1]) Gleicherweise musste auch der Begriff der Ausdehnung nicht erst durch komplizirte Schlüsse gebildet werden; er ist ebenfalls eine der Aussenwelt unmittelbar entnommene Vorstellung. Es sind also die Fundamente, auf die sich die Arithmetik und die Geometrie aufgebaut haben, von jeher als fertig gebildete Begriffe im menschlichen Geiste vorhanden gewesen, und dies ist neben dem Verlangen, diese mathematischen Grundbegriffe zu praktischen Zwecken zu verwerten, der Hauptgrund für die frühzeitige Entwicklung der mathematischen Disziplinen, von der schon die Völker des Altertums genügendes Zeugnis abgelegt haben.

Während aber die Alten es bloss verstanden haben, mit bestimmten Zahlengrössen zu operiren, ist es gerade ein bedeutender Vorzug der modernen Mathematik, dass sie in dem Rechnen mit Buchstaben, d. h. mit unbestimmten Zahlengrössen, das Mittel gefunden hat, sämtlichen Problemen und Resultaten eine weit umfassendere und übersichtlichere Darstellung zu geben.

Anfänglich beschränkte man sich in der Algebra darauf, aus vorgelegten analytischen Ausdrücken alle darin enthaltenen Eigenschaften herauszulesen; allmälig aber trat das Bestreben in den Vordergrund, die analytischen Ausdrücke von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus zu betrachten. Man suchte die charakteristischen Eigenschaften von Funktionsklassen mit gemeinsamen Merkmalen und betrat damit ein

1) Vgl. Gottlob Lipps: Die logischen Grundlagen des mathematischen Funktionsbegriffs. Inauguraldissertation. Leipzig 1888.

völlig neues Gebiet, durch das man bald einen tiefen Einblick in die Analysis erhielt und sich nunmehr über manches Rechenschaft geben konnte, was man früher teils mit Recht, teils mit Unrecht als richtig nur vermutet hatte. Es hat sich sogar die Funktionentheorie im Laufe dieses Jahrhunderts so sehr ausgedehnt und ist für die weitere Entwicklung der gesamten Mathematik von so ungeheurem Nutzen gewesen, dass sie heute nicht mehr bloss einen Zweig, sondern geradezu die Grundlage der Analysis bildet und für das Studium der übrigen mathematischen Disziplinen ein unentbehrliches Hülfsmittel geworden ist.

In vorliegender Arbeit ist nun der Versuch gemacht, die Entwicklung des Funktionsbegriffs selbst, welch' letzterer seit seiner Einführung in die Analysis wesentliche Veränderungen erlitten hat, in ihren Grundzügen historisch darzustellen. Von einer auch nur annähernd erschöpfenden Behandlung dieses weitschichtigen Stoffes konnte jedoch hier in keiner Weise die Rede sein; auch lag es nicht in meiner Absicht, den Entwicklungsgang bis in die neueste Zeit zu verfolgen, vielmehr schien mir mit der Riemann'schen Funktionentheorie ein gewisser Abschluss von selbst gegeben; denn bis dahin findet sich der Funktionsbegriff noch so vor, wie er aus den früheren Definitionen durch allmälige Weiterbildung hervorgegangen ist. Dagegen hielt ich es für zweckmässig, bei Gelegenheit der Funktionen komplexer Argumente eine kurze Geschichte der imaginären Zahlen einzuschalten, wobei ich hauptsächlich auf die neueren Untersuchungen etwas genauer einging.

Nachdem Descartes geometrische Probleme der analytischen Behandlung zugänglich gemacht hatte, war zum ersten Mal die Denkform der Alten verlassen und der Grundstein gelegt für das grosse Gebäude der modernen Mathematik; denn indem man die Abhängigkeit der Ordinate von der Abszisse durch einen algebraischen Ausdruck darstellte und daran den Verlauf und die Eigenschaften der krummen Linien studirte, wurde ein neues Prinzip zur Anwendung gebracht, das dem Altertum noch fern lag, und ohne welches ein weiteres Vordringen in den mathematischen Disziplinen mit Erfolg schlechterdings unmöglich war, nämlich das Prinzip der Bewegung oder der kontinuirlichen Veränderung. Wie rasch sich dieser neue Gedanke in der Wissenschaft einbürgerte, beweist schon die eine Tatsache, dass Roberval[1]), ein Zeitgenosse Descartes', bei der Behandlung der Cykloide bereits von dem „Axiom" ausging, dass jede Kurve durch die Bewegung eines nach zwei oder mehreren Richtungen angetriebenen Punktes beschrieben werden könne, und dass die Richtung seines Laufes zugleich die Tangente des Kurvenpunktes sei. Von diesem Prinzip geleitet, gelangte ferner Barrow[2]), Newtons Lehrer, zu seinem triangulum characteristicum und leistete dadurch der Entdeckung des Differentialbegriffs, der aus dem Prinzip der Bewegung notwendig hervorgehen musste, wesentlichen Vorschub.

Indem man aber die Werte untersuchte, welche ein beliebiger algebraischer Ausdruck nach und nach annimmt, wenn in ihm eine allgemein bezeichnete Grösse eine stetige Folge von Werten durchläuft, und dabei die geometrische Darstellung zu Hülfe nahm, hatte man den Begriff der abhängigen und der unabhängigen Variablen in die Mathematik aufgenommen. Da diese Begriffe fortan die ganze Analysis be-

1) Cohen: Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte. Berlin 1883. pg. 34.

2) ib. pg. 43 und pg. 79.

herrschten, zeigte sich auch bald das Bedürfnis, wenigstens für den einen der beiden einen besonderen Namen einzuführen.

Johann Bernoulli[1]) hat nun zuerst bei der Behandlung des isoperimetrischen Problemes den Begriff der abhängigen Veränderlichen als „*Funktion*“ bezeichnet und dabei folgende Definition gegeben:

„On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.“

Allerdings war das Wort „Funktion“ in der Mathematik schon früher üblich, doch hatte es nur eine spezielle und untergeordnete Bedeutung. Wir begegnen ihm schon in einem Briefe, den Leibniz[2]) im Jahre 1694 an Huyghens schrieb, und worin er unter Funktion gewisse Stücke von geraden Linien verstand, die bei der Untersuchung der Kurven von Wichtigkeit sind, so z. B. die Abszisse, die Ordinate, die Normale, die Subtangente u. dgl., und in diesem Sinn wurde es dann auch von den andern Mathematikern[3]) gebraucht. Man sah jedoch bald von dieser rein geometrischen Bedeutung des Wortes Funktion ab und wandte es auch auf einfache arithmetische Ausdrücke an, besonders auf Potenzen und Wurzelgrössen[4]).

Allein erst durch die umfassende Definition von Joh. Bernoulli hat diese Bezeichnung ihr spezielles Gepräge verloren und ist ein fundamentaler Begriff geworden, dessen enorme Tragweite schon Leibniz[5]) scheint geahnt zu haben, als er mit den Worten: „Placet etiam quod appellatione functionum uteris“ sein Gefallen daran kund tat.

Später machte Euler mit Bestimmtheit darauf aufmerksam, dass die Bernoullische Definition des Funktionsbegriffs

1) Mémoires de l'académie royale des sciences 1718 pg. 132.

2) Leibnizens mathem. Schriften, hrsg. von Gerhardt. I. Abtlg. II. Bd. pg. 186.

3) Jacobi Bernoulli Opera T. II. pg. 768 u. 788.

4) Histoire de l'académie royale des sciences 1706 pg. 70 und Historia et origo calculi differentialis (Leibnizens mathem. Schriften. Bd. V.) pg. 392.

5) Leibnitii et Bernoullii commercium philosophicum. T. I. Epist. LXXV. pg. 386.

einer Verallgemeinerung fähig sei, obgleich er in seiner Introductio [1]) noch genau im Sinne von Joh. Bernoulli definirt:

„Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.“

Man wusste nämlich schon längst, dass, wenn eine veränderliche Grösse y mit einer andern veränderlichen Grösse x durch eine algebraische Gleichung so verbunden war, dass man diese Gleichung nicht nach y auflösen konnte, y dennoch in ganz bestimmter Weise von x abhängig sei. Da man aber nicht im stande war, y wirklich als analytischen Ausdruck in x darzustellen, so war man nach dem bisherigen Sprachgebrauch nicht berechtigt, y als eine Funktion von x zu bezeichnen. Nun hielt man zu jener Zeit noch allgemein an der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen aller Grade fest und nahm daher auch an, es existire ein algebraischer Ausdruck in x, welcher, für y in die Gleichung eingesetzt, dieselbe identisch befriedige, nur besitze man noch nicht die genügenden Mittel, ihn zu berechnen. Aus diesem Grunde nannte Euler [2]) eine solche Grösse y eine „*implizite Funktion*“ von x und hatte so die von Joh. Bernoulli gegebene Definition dahin verallgemeinert, dass er an Stelle jener expressio analytica eine arithmetische Abhängigkeit treten liess, deren Gesetz man nicht näher zu kennen brauchte. Diesem Umstand hat Euler in der Tat Rechnung getragen und später in seiner Differentialrechnung [3]) folgende Definition aufgestellt:

„Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent“; dabei hebt er noch besonders hervor: „quae denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur.“

Den Begriff der expliziten Funktion beschränkte man

[1]) Introductio in analysin infinitorum. 1748. Lib. I. art. 4.

[2]) ib. art. 8.

[3]) Institutiones calculi differentialis 1755. Praefatio pg. VI.

indessen nicht etwa bloss auf geschlossene Formen, sondern man dehnte ihn auch aus auf beliebige transzendente Ausdrücke, und diese letzteren dachte man sich stets durch unendliche Reihen dargestellt, weil man so am besten im stande war, die Natur der Funktion zu erkennen[1]); ob und wann aber eine solche unendliche Reihe einen Sinn hatte, darüber gab man sich damals so gut wie keine Rechenschaft[2]).

Liegt nun schon in dem Begriff der impliziten Funktion eine Erweiterung des von Bernoulli aufgestellten Funktionsbegriffs, so gilt dies noch in viel höherem Masse von dem Begriff der willkürlichen Funktion, welcher ebenfalls durch Euler in die Analysis eingeführt wurde bei Gelegenheit des Problemes schwingender Saiten, das auf die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

hinauslief[3]).

D'Alembert, welcher im Jahre 1747 hiefür zuerst das vollständige Integral y gefunden hatte, knüpfte daran noch die Bedingung, dass der Ausschlag y in den Befestigungspunkten der Saite gleich null sein müsse, und glaubte damit das physikalische Problem gelöst zu haben. Allein schon im folgenden Jahre erschien über den nämlichen Gegenstand eine Arbeit von Euler, worin dieser bemerkte, dass die Bewegung der Saite nur dann vollkommen bestimmt sei, wenn man für einen gewissen Zeitmoment, z. B. für $t = 0$, die Form der Saite und die Geschwindigkeit ihrer einzelnen Punkte kenne. Indem er auf diese Weise beliebig gezeichnete Kurven (denn eine solche war ja die Form der Saite zur Zeit $t = 0$) in den Kreis seiner Betrachtungen zog und an das Integral y der obigen Differentialgleichung die Forderung stellte, für $t = 0$ in jene willkürlich angenommene Kurve überzugehen, war die

[1]) Euler: Introductio in anal. inf. Lib. I. art. 59.

[2]) Um hierüber Näheres zu erfahren, schlage man nach: Hermann Hankel: Über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Funktionen. Mathem. Annal. Bd. 20 pg. 63.

[3]) Vgl. Riemann: Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Gesammelte math. Werke pg. 213.

Behauptung ausgesprochen, dass dieselbe als eine Funktion von x betrachtet werden müsse; denn y war gemäss der Euler'schen Definition eine Funktion von t und x und somit y für $t = 0$ eine solche von x allein.

Da man aber damals bei einer beliebigen krummen Linie die Abhängigkeit der Ordinate von der zugehörigen Abszisse nicht durch einen arithmetischen Ausdruck darstellen konnte, und Euler also eine völlig gesetzlose Abhängigkeit zwischen zwei veränderlichen Grössen als Funktion bezeichnete, so hatte er damit die Grenzen seiner eigenen Definition weit überschritten und auch dem Begriff der *willkürlichen* Funktion das Bürgerrecht in der Analysis verschafft.

Die willkürlichen Funktionen spielten indessen bis zu Anfang unseres Jahrhunderts nur eine untergeordnete Rolle, weil es trotz aller Bemühungen bis dahin nicht gelungen war, sie in analytischer Form darzustellen, und so definirten denn die meisten Mathematiker des vorigen Jahrhunderts den Funktionsbegriff entweder im Sinne von Joh. Bernoulli als explizit gegebene Grösse[1]) oder aber in dem erweiterten Euler'schen Sinn als eine beliebige arithmetische Abhängigkeit zwischen zwei oder mehreren Veränderlichen, gleichviel ob man die eine Variable durch die andere ausdrücken konnte oder nicht[2]). Eine Ausnahme machte z. B. Monge[3]), welcher y auch dann noch eine Funktion von x nannte, wenn zwischen x und y in keiner Weise eine analytische Relation hergestellt werden konnte.

Es war das grosse Verdienst des französischen Mathematikers und Physikers Fourier[4]), in gewissen trigonometrischen Reihen das Mittel gefunden zu haben, nicht nur arithmetische, sondern auch graphisch gegebene, d. h. gesetzlose Abhängigkeiten analytisch darzustellen. Bald wandte man die von ihm angegebene Methode auf mathematische und

---

[1]) So z. B. Lagrange: Théorie des fonctions analytiques. 2 éd. 1813 pg. 1 und Leçons sur le calcul des fonctions. 2 éd. 1806 pg. 4.

[2]) Vgl. Lacroix: Traité du calcul différentiel et du calcul intégral 1810. Tome I. pg. 1.

[3]) Application de l'analyse à la géométrie. 4. ed. 1809. pg. 7.

[4]) Théorie analytique de la chaleur 1822. pg. 210.

physikalische Probleme an, musste aber in jedem einzelnen Falle die Konvergenz der Fourier'schen Reihe gegen den Wert der Funktion besonders beweisen, weil eine allgemeine und hinreichende Begründung dieses Satzes damals noch fehlte. Es dauerte sogar ziemlich lange, bis in dieser Richtung ein namhafter Fortschritt gemacht wurde.

Im Jahre 1826 versuchte Cauchy[1]) in einer Arbeit, welche er in den Abhandlungen der Pariser Akademie veröffentlichte, Fouriers Behauptung zu beweisen. Allein dieser Versuch misslang gänzlich, und es blieb Dirichlet[2]) vorbehalten, den Beweis für die Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen durch Fourier'sche Reihen in aller Strenge durchzuführen, jedoch nur unter gewissen Voraussetzungen: so durfte die Funktion in einem endlichen Intervalle nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis enthalten, sodann musste sie durchgehends eine Integration zulassen etc.

Durch diese epochemachende Entdeckung Fouriers nahm nun der Funktionsbegriff mit einem Schlage einen wesentlich anderen Charakter an. Da man die Ordinaten beliebig gezeichneter Kurven durch analytische Ausdrücke, d. h. als Funktionen ihrer Abszissen darstellen konnte, so umfasste jetzt die Euler'sche Definition eo ipso auch die willkürlichen oder graphisch gegebenen Abhängigkeiten und erlangte dadurch eine weit allgemeinere Bedeutung.

Man hat daher eine Grösse y eine Funktion einer veränderlichen Grösse x genannt, wenn jedem Wert von x innerhalb eines gewissen Intervalles ein oder auch mehrere bestimmte Werte von y zugeordnet sind. Dabei ist es keineswegs notwendig, dass diese Zuordnung in dem ganzen Intervall nach demselben Gesetze stattfinde; sie kann vielmehr in verschiedenen Teilen nach ganz verschiedenen Gesetzen erfolgen, ja es kann sogar die Zuordnung eine völlig willkürliche sein.

[1]) Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques. Mémoires de l'académie des sciences de Paris. Tome VI. pg. 603.

[2]) Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Crelles Journal Bd. IV. pg. 157.

Diese Definition wurde von Dirichlet[1]) als Ausgangspunkt benützt für seine fundamentalen Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen und in Folge dessen von Hankel[2]) als die Dirichlet'sche bezeichnet.

Fragt man sich aber, was mit dieser allgemeinsten Auffassungsweise denn eigentlich gewonnen sei, so muss man allerdings gestehen, dass dem so definirten Funktionsbegriff jegliche Realität abhanden gekommen ist, da Funktionen dieser Art allgemeine Eigenschaften nicht besitzen. Noch viel weniger können wir von ihren Differentialquotienten etwas aussagen; man weiss sogar nicht einmal, ob auch solche vorhanden sind, und selbst wenn man die Annahme machen würde, y solle sich mit x stetig ändern, so wäre damit die Existenz des Differentialquotienten noch keineswegs ausser Frage gestellt. In der Tat hat Herr Weierstrass[3]) nachgewiesen, dass die Differenzirbarkeit in dem Begriff der Stetigkeit nicht enthalten ist; es fallen somit bei willkürlichen Funktionen Betrachtungen über Tangenten, Krümmungsverhältnisse u. dgl. dahin.

Die Mängel der Dirichlet'schen Definition zeigten sich aber noch deutlicher, als man nicht nur reelle, sondern auch imaginäre Argumente mit in Berücksichtigung zog. Es war daher notwendig, den Funktionsbegriff wieder einzuschränken, und dies tat dann im Jahre 1851 Riemann[4]) indem er, ausgehend vom Dirichlet'schen Begriffe, denjenigen der Funktion einer komplexen Veränderlichen neu definirte.

Da indessen die Funktionentheorie nicht bloss von dem Begriff der Funktion, sondern ebenso sehr auch von dem Begriff der Grösse beherrscht wird, und da die Übertragung des Funktionsbegriffs auf komplexe Argumente ihren unge-

[1]) Doves Repertorium der Physik 1837. Bd. I. pg. 152.

[2]) Über die unendl. oft oscill. u. unstet. Funkt. pg. 5.

[3]) Borchardts Journal Bd. 79 pg. 27 und Weierstrass: Abhandlungen aus der Funktionenlehre 1886 pg. 92.

[4]) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse. Göttingen 1851.

heuren Erfolg lediglich dem Umstand zu verdanken hat, dass besonders durch die Arbeiten von Argand und Gauss der Sinn und die grosse Bedeutung der komplexen Zahlen ins rechte Licht gesetzt worden sind, so scheint es nicht unzweckmässig, an dieser Stelle die Einführung der komplexen Grössen in die Mathematik in Kürze historisch zu verfolgen. Ich kann mich, wenigstens was die ältere Periode betrifft, um so mehr auf eine knappe Darlegung beschränken, als eine Geschichte der komplexen Zahlen schon von Hankel [1]) in ziemlich ausführlicher Weise gegeben worden ist, und Gauss und Andere [2]) auch die Gründe dargetan haben, weshalb die Frage nach deren Existenz so lange Zeit unbeantwortet blieb. Immerhin bildet ein historischer Überblick über diesen Gegenstand eine notwendige Ergänzung der vorliegenden Arbeit.

Als man sich mit der Auflösung der Gleichungen zweiten Grades beschäftigte, stiess man bald auf Schwierigkeiten. Es traten nämlich Quadratwurzeln auf, und diese wusste man bei negativen Radikanden nicht zu deuten, weil ihnen weder durch positive noch durch negative Zahlen entsprochen werden konnte. Man bezeichnete daher eine solche Grösse als eine *„unmögliche“* oder nach Descartes [3]) als eine *„imaginäre“* und war der Meinung, dass eine Gleichung, die nur auf imaginäre Wurzeln führte, sinnlos und absurd sei [4]). Zu dieser irrigen Ansicht verleitete ganz besonders die Tatsache, dass man den imaginären Grössen in der Aussenwelt kein Substrat zu Grunde legen konnte. So kam es, dass dieselben anfänglich nur mit äusserster Vorsicht angewandt wurden, und dass man von der Richtigkeit eines Satzes, den

[1]) Theorie der komplexen Zahlensysteme. Leipzig 1867 pg. 71 u. 81.

[2]) Gauss Werke. Bd. II. pg. 175. Arenstein: Was sind die imag. Grössen und welcher ist ihr analyt. und geometr. Sinn. (Naturw. Abhandlungen herausgegeben von W. Haidinger, Bd. II., II. Abteilung pg. 43) etc. etc.

[3]) Renati Descartes Geometria. Editio secunda. Lib. III. pg. 76.

[4]) Montucla: Histoire des mathématiques. Tome III. pg. 27.

man mit Hülfe imaginärer Zahlen bewiesen hatte, erst dann völlig überzeugt war, wenn man zu demselben auch noch auf anderem Wege gelangen konnte.

Ähnliches geschah auch mit den *negativen* Zahlen, denen man zuerst bei der Behandlung der linearen Gleichungen begegnete. Lange Zeit hielt man auch diese für etwas Unmögliches und nannte die negativen Wurzeln einer Gleichung „*falsche*“ Wurzeln, eine Bezeichnung, deren sich sogar Descartes[1]) noch bediente, obwohl er selbst durch die Methoden der analytischen Geometrie zuerst gezeigt hatte, dass den negativen Zahlen wirklich auch ein bestimmtes Substrat zu Grunde gelegt werden konnte[2]). Sogar noch später haben sehr hervorragende Mathematiker die algebraische Existenz der negativen Zahlen trotz ihrer ganz bestimmten, geometrischen Bedeutung bezweifelt. So sagt z. B. Wallis[3]): „Impossibile est, quantitatem ullam negativam esse, impossibile est enim, ut ulla magnitudo sit minus quam nihil, aut ullus numerus paucior quam 0“; fügt dann aber noch bei: „Nec tamen est ea suppositio aut inutilis, aut absurda, modo recte intelligatur“, da nämlich: „nota −, ... cum ... physicam subit considerationem, magnitudinem non minus realem denotat, quam ipsum + i; sed sensu suppositioni contrario interpretandam.“

Nichtsdestoweniger gewöhnte man sich, nachdem einmal Descartes die analytische Geometrie geschaffen hatte, ziemlich rasch an die negativen Zahlen, und bald schwanden auch alle Bedenken, die man früher gegen sie erhoben hatte.

Anders verhielt es sich mit den imaginären Grössen. Man übersah vollständig, dass die Existenz neu in die Mathematik eingeführter Begriffe stets in deren Definition selbst begründet ist[4]), mögen nun diese in der Natur ihr Entsprechendes finden oder nicht, und so vergingen fast zwei

[1]) l. c. pg. 69.

[2]) Francisci à Schooten in geometriam Renati Descartes commentarii in librum III. pg. 283.

[3]) Opera mathematica. 1693. Tomus II. pg. 286.

[4]) Vgl. Durège: Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderl. Grösse. III. Aufl. 1882 pg. 3.

Jahrhunderte, ehe die volle Gleichberechtigung der imaginären Zahlen mit den reellen anerkannt wurde.

Nach Hankels Angabe scheint Albert Girard[1]) zuerst die imaginären Grössen als vollgültige Wurzeln der Gleichungen betrachtet zu haben, eine Ansicht, die dann auch von andern Mathematikern geteilt worden ist. Als Beleg hiefür sei folgende Stelle aus Descartes' Geometrie[2]) angeführt: „Ceterum radices tam verae quam falsae non semper sunt reales, sed aliquando tantum imaginariae", wo zugleich zum ersten Mal der Ausdruck „*reell*" im Gegensatz zu imaginär gebraucht wird. Man unternahm es auch schon frühzeitig, Erklärungen für die imaginären Zahlen zu geben, und zwar wollte man ihren Sinn vor allem durch geometrische Interpretation feststellen.

Von den Mathematikern, welche sich mit dieser Frage befasst haben, dürfte wohl Wallis einer der ersten gewesen sein. Schon er hat die wichtige Bemerkung gemacht, dass die imaginären Zahlen nicht durch Punkte dargestellt werden können, die mit den Repräsentanten der reellen Zahlen auf derselben Geraden sich befinden, wohl aber durch solche, die mit dieser Geraden in einer und derselben Ebene liegen[3]). Arithmetisch erklärt er die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl als mittlere Proportionale zwischen einer positiven und einer negativen Grösse[4]): „Nam prout $\sqrt{+bc}$ significat mediam proportionalem inter $+b$ et $+c$, aut etiam inter $-b$ et $-c$, ita $\sqrt{-bc}$ significabit mediam proportionalem inter $+b$ et $-c$, vel inter $-b$ et $+c$."

Sechzig Jahre später erschien eine Arbeit von Heinrich Kühn[5]), in welcher ebenfalls der Versuch gemacht wurde, die imaginären Grössen geometrisch zu veranschaulichen. Sie

*[1]) Invention nouvelle en l'Algèbre. Amsterdam 1629.
Die mit * bezeichneten Quellen blieben mir unzugänglich.

[2]) Editio secunda pg. 76.

[3]) l. c. Cap. 67.

[4]) l. c. Cap. 66.

[5]) Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. (Novi commentarii Academiae Petropolitanae. T. III. ad annum 1750 et 1751 pg. 170).

brachte indessen im wesentlichen nichts Neues, und so blieb man immer noch auf dem Standpunkt, den schon Wallis eingenommen hatte. Ja einzelne Mathematiker, wie de Foncenex[1]), behaupteten geradezu, es sei widersinnig, etwas Unmögliches geometrisch darstellen zu wollen; man müsse sich vielmehr bemühen, die imaginären Grössen womöglich ganz aus dem Endresultat einer Auflösung wegzuschaffen[2]).

Eine andere Ansicht vertrat zu Anfang unseres Jahrhunderts Buée[3]), doch war auch diese nicht geeignet, über den noch dunklen Begriff der imaginären Zahlen einiges Licht zu verbreiten. Nach Buée drückt $\sqrt{-1}$ nicht eine arithmetische, sondern lediglich eine geometrische oder deskriptive Operation aus, und daher kann auch keine Zahl, die mit $\sqrt{-1}$ multiplizirt ist, eine abstrakte Grösse bedeuten. Für ihn ist $\sqrt{-1}$ nichts anderes als ein „signe de la perpendicularité". „Ce signe mis devant a (a signifiant une ligne ou une surface) veut donc dire, qu'il faut donner à a une situation perpendiculaire à celle qu'on lui donnerait, si l'on avait simplement + a ou − a"[4]). Ja er ist von der rein geometrischen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ so sehr eingenommen, dass er an einer andern Stelle[5]) sagt: „Dans les questions purement arithmétiques le signe $\sqrt{-1}$ devant indiquer une opération arithmétique et ne le pouvant pas, indique une opération absurde." Durch diese einseitige und unrichtige Auffassungsweise gelangte denn auch Buée zu den merkwürdigsten Resultaten.

---

[1]) Réflexions sur les quantités imaginaires. (Miscellanea philosophico-mathematica societatis privatae Taurinensis Tomus I. 1759 pg. 113).

[2]) l. c. pg. 122. „Les racines imaginaires n'admettent donc pas une construction géométrique, et on ne peut en tirer aucun avantage dans la résolution des problêmes: on devrait par conséquent s'attacher à les écarter autant qu'il est possible des équations finales, puisque prises dans quel sens que ce soit, elles ne peuvent pas résoudre la question, comme les racines négatives dont toute la contradiction consiste dans leur manière d'être à l'égard des positives."

[3]) Mémoire sur les quantités imaginaires. (Philosophical Transactions for the year 1806 pg. 23).

[4]) l. c. pg. 28.

[5]) p. 34.

Um nur *ein* Beispiel anzuführen, sei erwähnt, dass er unter anderm die Gleichung

$$(\sqrt{-1})^n = \pm n\sqrt{-1}$$

ableitet[1]) und zwar nicht etwa nur für positive, ganzzahlige Werte von n, sondern auch für den allgemeinsten Fall, wo n einen positiven oder negativen Bruch bedeutet.

Der erste, welcher den geometrischen Sinn des Imaginären richtig zu interpretiren wusste, war Argand. Er hatte in einer anfänglich unbeachtet gebliebenen Schrift[2]) gezeigt, wie man durch Leitstrahlen von bestimmter Länge und Richtung jede imaginäre Zahl auf einer Ebene darstellen kann und auch die Regeln angegeben, wie für Summen und Produkte die entsprechenden Leitstrahlen zu konstruiren sind.

Es ist ein Leichtes, die Übereinstimmung der von Argand angegebenen geometrischen Operationen mit den Resultaten blosser Rechnung nachzuweisen, und daher hat es seine volle Berechtigung, wenn Argand von Hankel als „der wahre Begründer der Darstellung des Komplexen in der Ebene" bezeichnet wird. Dessen ungeachtet waren die imaginären Zahlen doch „noch immer weniger eingebürgert, als nur geduldet" (Gauss). Cauchy stellte zwar in seinem Cours d'Analyse[3]) eine strenge Theorie der imaginären Grössen auf, worin er sie als „symbolische" betrachtete, d. h. als gewisse Kombinationen algebraischer Zeichen, welche an und für sich nichts bedeuten, die aber, wenn sie den verschiedenen Operationen der Algebra unterworfen werden, doch sehr oft zu wichtigen Resultaten führen. Allein es scheint, dass diese Auffassung der imaginären Zahlen ihn doch nicht befriedigte, denn er sagte später in seinen Exercices[4]): „Après de nouvelles et mûres réflexions le meilleur parti à prendre me paraît être d'abandonner entièrement l'usage de $\sqrt{-1}$, et de remplacer la théorie des expressions imaginaires par la théorie

[1]) l. c. pg. 72.

[2]) Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris 1806.

[3]) Cours d'analyse. 1821 pg. 173.

[4]) Mémoire sur les quantités géométriques. (Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. Tome IV. 1847 pg. 157).

des quantités que j'appellerai géométriques", und damit kehrte er wieder zu der geometrischen Interpretation Argands zurück.

Wenn nun auch Gauss auf die Priorität in der geometrischen Darstellung der imaginären Grössen keinen Anspruch machen kann, so hat er, um mit Hankel zu reden, doch das grosse Verdienst, „durch seine präzise Darstellung und seine gewichtige Autorität alle Bedenken gegen ihre Einführung vernichtet zu haben." Schon in seiner Doktordissertation[1]) hat er sich dahin geäussert, dass, wenn man die imaginären Grössen in der Analysis überhaupt beibehalten wolle, dieselben gerade mit ebensoviel Recht als „mögliche" zu betrachten seien, wie die reellen, und dass man in diesem Fall gut daran tun würde, die reellen und die imaginären Grössen unter einem gemeinsamen Namen etwa als „quantitates possibiles" zusammenzufassen. Immerhin hielt er es für besser, seinen ersten Beweis für die Zerlegbarkeit ganzer rationaler Funktionen in Faktoren ohne die Zuhülfenahme der imaginären Zahlen durchzuführen. Einige Jahre darauf (1811) sprach er sich jedoch in einem an Bessel[2]) gerichteten Brief sehr unzweideutig darüber aus, wie notwendig es sei, den imaginären Grössen seinem Grundsatz gemäss in der Mathematik das gleiche Recht einzuräumen, wie den reellen, und sie nicht nur als „Überbein" anzusehen, da die Analysis „durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen .... alle Augenblicke Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genötigt sein würde", und im Jahre 1831 veröffentlichte er dann seine berühmte Theorie der imaginären Grössen[3]), weil er sich genötigt sah, in seine Untersuchungen über die biquadratischen Reste, die sich bisher bloss auf das Gebiet des Realen erstreckt hatten, auch das Imaginäre hineinzuziehen.

Bei der Erweiterung des Zahlenbegriffs geht Gauss rein

---

[1]) Gauss Werke. Bd. III pg. 6.

[2]) Baltzer: Ueber die Einführung der komplexen Zahlen. Kroneckers Journal Bd. 94 (1883) pg. 87.

[3]) Gauss Werke Bd. II pg. 174 ff.

spekulativ vor. Da das eindimensionale Gebilde einer Punktreihe, als Träger aller reellen Zahlen aufgefasst, eine Zahlenmannigfaltigkeit von einer Dimension repräsentirt, so muss notwendig das zweidimensionale Gebilde einer Ebene, wiederum als Träger einer Zahlenmannigfaltigkeit aufgefasst, eine solche von zwei Dimensionen repräsentiren, d. h. es muss auf Zahlengrössen führen, die aus zwei Haupteinheiten 1 und i und deren Teilen zusammengesetzt sind, wobei sich die algebraische Form der Einheit i auf folgende Weise ergibt.

Sei A der Punkt, welcher von einem beliebig gewählten Punkt O um die Einheitsstrecke entfernt ist, A′ der zu A in Bezug auf den Punkt O diametral gegenüberliegende Punkt; sei ferner B der Punkt, welcher auf der Senkrechten durch O ebenfalls um die Einheitsstrecke von O entfernt und links von der Geraden A′A liegt, und B′ der B gegenüberliegende Punkt. Bezeichnen wir nun die Relation des Punktes O zu A mit $+1$, so müssen wir die des Punktes O zu A′ mit -1 bezeichnen; drücken wir weiter die Relation zwischen O und dem links von der Geraden A′A liegenden Punkt B durch $+i$ aus, so ist die zwischen O und B′ durch $-i$ gegeben. Es hätte uns aber nichts daran gehindert, die Relation zwischen O und B mit $+1$ zu bezeichnen, dann hätte man die zwischen O und B′ mit -1, die Relation zwischen O und dem links von der Geraden B′B liegenden Punkt A′ mit $+i$ und die zwischen O und A mit $-i$ bezeichnen müssen. Das heisst aber: es verhält sich die Relation zwischen O und A zu der Relation zwischen O und B, wie die Relation zwischen O und B zu der Relation zwischen O und A′, oder es besteht die Gleichung:

$$1 : i = i : -1 \text{ , woraus}$$
$$i = \pm \sqrt{-1}$$

Es können somit 1 und $\sqrt{-1}$ als die beiden Haupteinheiten der Zahlenmannigfaltigkeit von zwei Dimensionen betrachtet werden, und Gauss hat in der Tat auch für $\sqrt{-1}$ den Buchstaben i vorgeschlagen[1]). Für Zahlen von der Form $\alpha + \beta i$ hat Gauss[2]) statt des Ausdruckes „imaginär“ die

[1]) Gauss Werke Bd. I. pg. 414. [2]) l. c. Bd. II pg. 102.

weit passendere Bezeichnung „*komplex*“ eingeführt; auch hat er selbst erklärt, dass man kaum so lange Zeit über dieselben hätte im Unklaren sein können, wenn man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht „positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche)“, sondern besser „direkte, inverse, laterale“ Einheiten genannt hätte [1]).

Die beiden Haupteinheiten 1 und i haben die spezielle Eigenschaft, dass sie den drei Gleichungen

$$1 \cdot 1 = 1 \quad , \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 = i \quad , \quad i \cdot i = -1$$

genügen, und dies ist auch der Grund, weshalb das Rechnen mit den aus diesen Einheiten zusammengesetzten Grössen sich noch einfach gestaltet. Theoretisch aber steht uns nichts im Wege, komplexe Zahlen aus zwei vollständig willkürlichen Einheiten e_1 und e_2 und deren Teilen aufzubauen [2]), wo nun nicht mehr die Gleichungen gelten:

$$e_1 \cdot e_1 = e_1 \quad , \quad e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2 \quad , \quad e_2 \cdot e_2 = -e_1 .$$

Selbstverständlich dürfen e_1 und e_2 in keinem Zusammenhang zu einander stehen, mit andern Worten, sie müssen in Bezug auf Addition und Subtraktion von einander unabhängig sein. Alsdann wird jede aus diesen allgemeinen Einheiten gebildete komplexe Zahl die Form

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

annehmen, wo α_1 und α_2 reelle Zahlen bedeuten und die „*Koordinaten*“ der komplexen Zahl genannt werden. Aus der Definition einer solchen komplexen Zahl geht dann unmittelbar hervor, dass eine Gleichung wie

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

nur dann einen Sinn haben kann, wenn

$$\alpha_1 = \beta_1 \text{ und } \alpha_2 = \beta_2$$

ist. Insbesondere kündigt die Gleichung

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$$

das gleichzeitige Bestehen der beiden Relationen

$$\alpha_1 = 0 \text{ und } \alpha_2 = 0$$

an.

---

[1]) l. c. Bd. II pg. 110.

[2]) Für die nächstfolgenden Betrachtungen, welche von Herrn Weierstrass herrühren, sei verwiesen auf Stolz: Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Leipzig II. Theil 1886, pg. 1 ff.

Wollen wir nun aber mit solchen komplexen Zahlen wirklich auch rechnen, so müssen wir zunächst definiren, was man unter deren Summe, Differenz, Produkt und Quotienten zu verstehen hat. An und für sich ist dies ganz unserer Willkür überlassen; allein es ist in der Mathematik von der grössten Wichtigkeit, dass überall da, wo bekannte Operationen auf neu eingeführte Begriffe ausgedehnt werden, dies in der Weise geschieht, dass die bei diesen Operationen geltenden Hauptgesetze auch noch weiter bestehen[1]). Dieser Grundsatz, den Hankel[2]) *„das Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze“* genannt hat, muss auch hier befolgt werden.

Wenn also die vier Grundoperationen mit diesen neuen Zahlen möglichst zweckmässig definirt werden sollen, so müssen dabei folgende Hauptgesetze bestehen bleiben:

1) Sind a, b, c komplexe Grössen derselben Art, d. h. aus denselben Einheiten zusammengesetzt, also etwa

$$a = \alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2, \qquad b = \beta_1\, e_1 + \beta_2\, e_2, \qquad c = \gamma_1\, e_1 + \gamma_2\, e_2,$$

wo die α, β, γ reelle Zahlen sind, so müssen auch

$$a + b, \quad a - b, \quad a \,.\, b, \quad \frac{a}{b} \qquad \text{I}$$

komplexe Zahlen derselben Art sein;

2) müssen die Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{array}{c} a + b = b + a, \quad a \,.\, b = b \,.\, a, \\ (a + b) + c = a + (b+c), \quad (a\,b) \,.\, c = a \,.\, (bc), \\ (a + b)\, c = a\, c + bc, \\ a - b + b = a, \quad \frac{a}{b} \,.\, b = a, \end{array}\right\} \qquad \text{II}$$

wobei die Gleichungen der ersten Zeile das „kommutative“, die der zweiten Zeile das „assoziative“ und die der dritten Zeile das „distributive“ Gesetz darstellen[3]).

---

[1]) Vgl. Durège: Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Grösse. III. Aufl. 1882 pg. 8.

[2]) Theorie der komplexen Zahlensysteme pg. 11.

[3]) Hankel: l. c. pg. 2 und 3.

Definiren wir jetzt die *Addition* und *Subtraktion* durch die Gleichungen:

$$a \pm b = (\alpha_1 \pm \beta_1)\, e_1 + (\alpha_2 \pm \beta_2)\, e_2,$$

so bieten diese Operationen nicht mehr die geringsten Schwierigkeiten, da, wie man leicht sieht, die formalen Gesetze I und II dadurch erhalten bleiben.

Das *Produkt* wird dem oben angegebenen Prinzip gemäss definirt durch die Gleichung:

$$a.b = (\alpha_1\, \beta_1)\, (e_1\, e_1) + (\alpha_1\, \beta_2)\, (e_1\, e_2) + (\alpha_2\, \beta_1)\, (e_2\, e_1) + (\alpha_2\, \beta_2)\, (e_2\, e_2).$$

In dieser Formel ist bereits das distributive Gesetz enthalten; damit auch das kommutative und das assoziative erfüllt werden, müssen wir noch die Annahme machen, dass

$$e_1\, e_2 = e_2\, e_1 \qquad 1)$$

$$\left.\begin{aligned} (e_1\, e_1)\, e_2 &= e_1\, (e_1\, e_2) \\ (e_2\, e_2)\, e_1 &= e_2\, (e_2\, e_1) \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

sei. Soll ferner a . b eine Grösse derselben Art sein, wie a und b, so müssen wir dies von den Einheitsprodukten voraussetzen, d. h. wir müssen noch annehmen, dass

$$\left.\begin{aligned} e_1\, e_1 = \lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2, \qquad e_2\, e_2 = \nu_1\, e_1 + \nu_2\, e_2, \\ e_1\, e_2 = e_2\, e_1 = \mu_1\, e_1 + \mu_2\, e_2 \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

sei, wo die λ, μ, ν jetzt so zu bestimmen sind, dass die Relationen 2) wirklich erfüllt sind. Dies findet statt, wenn die λ, μ, ν den drei Gleichungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1\, \mu_2 &= \lambda_2\, \nu_1 \\ \mu_2\, (\lambda_1 - \mu_2) &= \lambda_2\, (\mu_1 - \nu_2) \\ \nu_1 (\lambda_1 - \mu_2) &= \mu_1\, (\mu_1 - \nu_2), \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

welche sich sofort ergeben, wenn man die Gleichungen 3) in die Gleichungen 2) substituirt und die Koeffizienten dergleichen Einheiten einander gleich setzt.

Wir können also unendlich viele Wertsysteme (λ, μ, ν) der Art aufstellen, dass, sobald wir eines derselben in die Gleichungen 3) einführen, jedesmal die fundamentalen Multiplikationsgesetze bestehen bleiben.

Statt aus den Einheiten e_1 und e_2 könnten wir die komplexen Zahlen eben so gut aus zwei anderen Einheiten E_1 und

E_2 zusammensetzen, die mit den ersten durch eine lineare Substitution

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 \\ E_2 &= \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2 \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

verbunden sind, deren Determinante

$$\sigma_1 \tau_2 - \sigma_2 \tau_1$$

aber von null verschieden ist; denn wäre

$$\sigma_1 \tau_2 - \sigma_2 \tau_1 = 0 ,$$

so würde die Substitution 5) nicht statthaft sein, weil dann E_1 und E_2 nicht mehr von einander unabhängig wären.

Soll auch noch die *Division* zweier komplexer Zahlen im allgemeinen (d. h. spezielle Werte des Divisors ausgenommen) ausführbar sein, so tritt für die Koeffizienten λ, μ, ν zu den drei Bedingungsgleichungen 4) noch eine Ungleichheitsbedingung hinzu.

Ist auch diese erfüllt, was noch immer auf unendlich viele Arten möglich ist, so lässt sich weiter zeigen, dass in jedem der so definirten Systeme von komplexen Zahlen stets eine Zahlengrösse

$$e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2$$

existirt, welche die Gleichung

$$a \,.\, e = e \,.\, a = a$$

befriedigt, wobei a eine beliebige komplexe Zahl desselben Systems bedeutet. Diese Zahl e können wir nun als die eine Haupteinheit wählen, während wir die andere e_2 belassen, so dass die Einheitsprodukte folgende Gestalt annehmen:

$$e\,e = e , \quad e\,e_2 = e_2\,e = e_2 , \quad e_2\,e_2 = \varrho\, e + \varrho_2\, e_2 \qquad 6)$$

wobei ϱ und ϱ_2 vollständig willkürlich sind, indem durch jeden Wert von ϱ und ϱ_2 die obigen vier Bedingungen erfüllt sind.

Untersucht man noch, welche Werte man ϱ und ϱ_2 beilegen muss, damit der Quotient zweier komplexer Zahlen des Systemes 6) immer einen Sinn hat (der Fall, wo der Divisor verschwindet, ist selbstverständlich ausgenommen), so ergibt sich, dass dies jedesmal und nur dann stattfindet, wenn die Wahl so getroffen wird, dass

$$\left(\frac{\varrho_2}{2}\right)^2 + \varrho < 0 .$$

Ist dagegen $\left(\frac{\varrho_2}{2}\right)^2 + \varrho \geqq 0$,

so hängt die Möglichkeit der Division von den Koordinaten des Divisors ab. Allein dies ist nicht der einzige Unterschied zwischen den beiden Fällen. Auch der Satz, dass ein Produkt zweier Grössen nur dann verschwinden kann, wenn einer seiner Faktoren null wird, verliert seine Gültigkeit, sobald $\left(\frac{\varrho_2}{2}\right)^2 + \varrho \geqq 0$ ist; es lässt sich nämlich dann jeder endlichen, von null verschiedenen Grösse a eine andere, von null verschiedene Grösse b so zuordnen, dass

$$a \,.\, b = 0$$

ist, d. h. in diesem Fall gibt es stets, um den Weierstrass'-chen Ausdruck zu gebrauchen, einen „Teiler der Null". Auf komplexe Zahlen dieser Art können also nicht mehr alle Regeln der gewöhnlichen Arithmetik angewandt werden.

Am einfachsten gestaltet sich der Quotient, wenn man

$$\varrho = -1 \text{ und } \varrho_2 = 0$$

setzt, so dass die Definitionsgleichungen der Einheitsprodukte

$$ee = e\,, \quad ee_2 = e_2 e = e_2\,, \quad e_2 e_2 = -e \qquad 7)$$

lauten. Lassen wir noch an Stelle von e die Einheit 1 und somit an Stelle von e_2 die Einheit $\sqrt{-1} = i$ treten, so gehen die Zahlen des Systemes 7) in die „gemeinen komplexen" oder schlechthin „komplexen" Zahlen über, und der Grund, weshalb das Rechnen mit den gemeinen komplexen Zahlen genau denselben Regeln unterworfen ist, wie das Rechnen mit den reellen Zahlen, liegt eben darin, dass die Koeffizienten der Einheitsprodukte

$$1.1 = 1\,, \qquad 1.i = i.1 = i\,, \qquad i.i = -1$$

den Bedingungsgleichungen 4) genügen und auch die Ungleichheit $\left(\frac{\varrho_2}{2}\right)^2 + \varrho = -1 < 0$ erfüllt ist.

Man könnte nun noch die Frage aufwerfen, ob sich auch für komplexe Zahlen, die aus mehr als zwei Haupteinheiten zusammengesetzt sind, die vier Grundoperationen so bestimmen lassen, dass dabei den oben angegebenen Forderungen

I und II, die sich nach dem Prinzip der Permanenz formaler Gesetze als notwendig erwiesen haben, genügt wird. In der Tat finden wir die ersten Spuren derartiger Untersuchungen schon bei Gauss[1]), welcher in der Anzeige zu seiner zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste mit der Bemerkung schliesst, er wolle sich vorbehalten, die Frage, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Grössen liefern können", an einer andern Stelle gelegentlich zu beantworten; indessen ist es bei dieser kurzen Andeutung geblieben.

Später nahm Hankel[2]) diese Frage wieder in Angriff und fand, dass man sehr wohl für Zahlen, die aus n Haupteinheiten gebildet sind, die Addition, Subtraktion und Multiplikation so definiren kann, dass bei allen drei Operationen das distributive und bei der Addition und Subtraktion auch noch das kommutative und das assoziative Prinzip gilt, dass dagegen bei dem Produkt zweier solcher Zahlen die beiden letzten Prinzipien nur dann erfüllt sind, wenn man dieselben für die Einheitsprodukte voraussetzt. Er zeigte sogar noch, dass ein solches Produkt nicht mehr die Eigenschaft besitzt, nur durch das Nullwerden eines seiner Faktoren zu verschwinden, und glaubte damit die Frage, deren Beantwortung Gauss schuldig geblieben war, gelöst zu haben[3]).

Noch weit eingehender hat Herr Weierstrass[4]) sich mit diesen höheren komplexen Zahlen beschäftigt; er hat sogar in seinen Vorlesungen schon darüber vorgetragen, ehe die Arbeit Hankels an die Öffentlichkeit gelangt ist, doch hat er seine damals angestellten Betrachtungen erst in neuester Zeit publizirt. Aus den Untersuchungen des Herrn Weierstrass geht hervor, dass sich für die Koordinaten der Einheits-

[1]) Gauss Werke Bd. II pg. 178.

[2]) Theorie der komplexen Zahlensysteme pg. 99 ff.

[3]) Hankel: l. c. pg. 108.

[4]) Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Grössen. (Nachrichten von der königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen 1884 pg. 395 ff.)

produkte unendlich viele Wertsysteme so wählen lassen, dass für die vier Grundoperationen die in den Formeln I und II enthaltenen Hauptgesetze bestehen bleiben, und dass die Division im allgemeinen ausführbar ist. Allein wenn man auch die Koordinaten der Einheitsprodukte demgemäss einmal fixirt hat, wodurch das Zahlensystem vollständig bestimmt ist, so kann es doch noch vorkommen, dass der Quotient $\frac{a}{b}$, wo a und b Zahlen dieses Systems bedeuten, keinen Sinn mehr hat.

Es existiren sogar in ein und demselben Zahlensystem immer solche Zahlen b, für welche dies der Fall ist, sobald die Anzahl n der Haupteinheiten grösser als 2 ist, während für $n = 2$ die Existenz solcher Zahlen b, wie wir gesehen haben, von der Wahl der Koordinaten der Einheitsprodukte abhängig ist. Ebenso gibt es auch, sobald $n > 2$ ist, stets in einem und demselben Zahlensysteme endliche, von null verschiedene Teiler der Null.

Herr Königsberger[1]) hat diesen Satz bewiesen für den Fall, dass man drei irreduktible Haupteinheiten 1, i, i', also eine Zahl von der Form $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 i'$ hat, die sich geometrisch durch einen Punkt A im Raum repräsentiren lässt, dessen rechtwinklige Koordinaten nach der X-, der Y-, der Z-Achse bezw. α_1, α_2, α_3 sind. Er zieht daraus folgenden Schluss:

„Somit ist ersichtlich, dass diese Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen nicht in der reinen Arithmetik zulässige Grössengattungen liefern kann, wenn wir als Bedingung der Zulässigkeit die feststellen, dass die für reelle Zahlen giltigen Rechnungsregeln auch für die anderen Zahlengattungen bestehen bleiben, und dass daher für die Punkte im Raum nicht ähnliche Repräsentanten existiren, welche arithmetische Grössen bedeuten, wie wir sie für die Punkte der Fundamentalebene in den komplexen imaginären Zahlen oben kennen gelernt haben."

---

[1]) Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Funktionen. I. Teil 1874. I. Vorlesung.

Für n = 2 ist das Vorhandensein von Teilern der Null wieder von der Wahl der Koordinaten der Einheitsprodukte abhängig. Es lässt sich indessen zeigen, dass diese Eigenschaften der höheren komplexen Zahlen für das Rechnen mit denselben nicht von fundamentaler Bedeutung sind, oder wie sich Herr Weierstrass[1]) ausdrückt, dass „die Arithmetik der allgemeinen komplexen Grössen zu keinem Resultate führen kann, das nicht aus Ergebnissen der Theorie der komplexen Grössen mit einer oder mit zwei Haupteinheiten ohne weiteres ableitbar wäre."

Einen andern Beweis für die Überflüssigkeit der höheren komplexen Zahlen von der besprochenen Art hat auch Herr Dedekind[2]) gegeben.

Ein System von höheren komplexen Zahlen, das besonders in der mathematischen Physik mit grossem Nutzen angewandt wird, bilden die Hamilton'schen Quaternionen[3]). Es sind dies komplexe Grössen, die aus vier Haupteinheiten 1, i, j, k zusammengesetzt sind, deren Produkte durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$ij=k \qquad jk=i \qquad ki=j$$
$$ji=-k \qquad kj=-i \qquad ik=-j$$
$$i^2=-1 \qquad j^2=-1 \qquad k^2=-1 \ .$$

Die Quaternionen unterscheiden sich aber wesentlich von den höheren komplexen Grössen der bisher besprochenen Art: sie genügen nämlich nicht mehr allen unter I und II aufgestellten Forderungen. So bleibt für das Produkt zweier Quaternionen, das man mit Hülfe des distributiven Prinzips erhält, wohl noch das assoziative, nicht mehr aber das kommutative Prinzip bestehen.

Lange, bevor die Theorie der gewöhnlichen komplexen Grössen von Argand und Gauss geschaffen war, hatte die Mathematik mit dem glücklichsten Erfolge sich ihrer schon bedient. Moivre[4]) war bei seinen Untersuchungen über die

[1]) l. c. pg. 411. [2]) Nachrichten von der königl. Ges. d. Wiss. 1885 pg. 141. [3]) Hankel: l. c. pg. 141. [4]) Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. Londini 1730. Liber II Cap. I.

trigonometrischen Funktionen auf die nach ihm benannte Formel

$$\cos n\,\alpha + \sqrt{-1}\,\sin n\alpha = (\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha)^n$$

gestossen, und Joh. Bernoulli[1]) hatte in den Gleichungen

$$(\mathrm{tg}\,\varphi - \sqrt{-1})^{2n+1}(\mathrm{tgn}\,\varphi + \sqrt{-1}) = (\mathrm{tg}\,\varphi + \sqrt{-1})^{2n+1}(\mathrm{tgn}\,\varphi - \sqrt{-1})$$
$$(\mathrm{tg}\,\varphi - \sqrt{-1})^{2n}\,(\mathrm{ctgn}\,\varphi + \sqrt{-1}) = (\mathrm{tg}\,\varphi + \sqrt{-1})^{2n}\,(\mathrm{ctgn}\,\varphi + \sqrt{-1})$$

das Analogon für die Tangente und die Cotangente aufgestellt. Aus den beiden letzten Identitäten lassen sich $\mathrm{tgn}\,\varphi$ resp. $\mathrm{ctgn}\,\varphi$ stets als reelle Funktionen von $\mathrm{tg}\,\varphi$ berechnen; dies war für Bernoulli der massgebende Grund, ihnen überhaupt eine Bedeutung beizulegen, wie man aus folgender Bemerkung entnehmen kann:

„Includet illa[2]) quidem quantitates imaginarias, seu impossibiles, sed hae ipsae in casu quolibet particulari evanescunt, et sic quæ per se sunt impossibilia, inserviunt tamen ad inveniendum quod est possibile."

Ebenso gestattete ihm die Anwendung imaginärer Formen den Zusammenhang zwischen den Kreisbögen und den Logarithmen imaginärer Argumente aufzufinden, indem sich mit Hülfe des bestimmten Integrals

$$4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4}{\sqrt{-1}}\int_0^a \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$$

als Inhalt des Kreises vom Radius a

$$2\,a^2\,\frac{\lg\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

ergab, woraus er durch Gleichsetzung mit πa^2 für π den Wert $2\frac{\lg\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$[3]) erhielt.

Euler war wohl der erste, welcher bei der Festsetzung des Funktionsbegriffs auch die komplexen Argumente berück-

[1]) Angulorum arcuumque sectio indeterminata per formulam universalem expressa sine serierum auxilio. Opera omnia. Tomus I pg. 511.

[2]) Bernoulli hat nämlich die beiden obigen Formeln in eine zusammengefasst, weshalb hier der Singularis gebraucht ist.

[3]) Montucla: Histoire des mathématiques. Tome III pg. 285. Vgl. hiezu: Acta eruditorum 1703, pag. 31.

sichtigte, indem er an seine erste Definition: „Functio quantitatis etc.“ noch ausdrücklich die Bemerkung knüpfte: „neque ullus valor determinatus excipietur, quem functio induere nequeat, cum quantitas variabilis quoque valores imaginarios involvat.“ Darnach ist vollständig klar, was man zu jener Zeit unter einer Funktion einer komplexen Variablen verstand, nämlich eine in expliziter Form gegebene arithmetische Abhängigkeit, wo an Stelle der reellen die komplexe Veränderliche getreten ist.

Die hohe Bedeutung Eulers auf diesem Gebiet besteht nun vor allem darin, dass er in der Gleichung

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

den Zusammenhang der Exponentialfunktionen mit den trigonometrischen Funktionen aufgedeckt und damit das Mittel gefunden hat, die Logarithmen und die trigonometrischen Funktionen komplexer Argumente algebraisch zu deuten, wodurch zugleich auch die Frage nach den Logarithmen negativer Zahlen, welche so lange Zeit die grössten Mathematiker wie Leibniz, Bernoulli, d'Alembert[1]) beschäftigt hatte, zu Gunsten von Leibniz entschieden worden ist[2]).

Aber nicht nur in der reinen, sondern auch in der angewandten Mathematik, in der höheren Geodäsie, stiess man verhältnismässig schon frühe auf Funktionen komplexer Argumente, und zwar geschah dies nicht etwa zufällig, sondern es war eine in der Natur des gestellten Problemes begründete Notwendigkeit. Man wusste nämlich schon im Altertum, dass es möglich sei, mittelst stereographischer Projektion die Kugeloberfläche auf die Ebene abzubilden, und Ptolemäus hatte auch bereits entdeckt, dass bei dieser Projektionsart den Kreisen auf der Kugeloberfläche wieder Kreise in der Ebene entsprechen, doch scheint ihm die eben so wichtige Tatsache, dass die projizirten Kreise auf der Ebene unter sich

---

[1]) D'Alembert: „Sur les logarithmes des quantités négatives“. Opuscules mathématiques. Tome I.

[2]) De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. Histoire de l'académie royale des sciences et des belles-lettres 1749.

dieselben Winkel einschliessen, wie die ursprünglichen auf der Kugel, entgangen zu sein [1]). Seitdem war dieses Problem zum Zwecke praktischer Verwertung noch von verschiedenen anderen Gesichtspunkten aus behandelt worden; aber erst in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts versuchte man, dasselbe auch in verallgemeinerter Gestalt zu lösen, und Lambert [2]) machte damit den Anfang, indem er die Aufgabe löste: „Die Kugelfläche überhaupt so zu entwerfen, dass die Mittagskreise von den Parallelkreisen durchaus unter rechten Winkeln geschnitten werden, die Grade der Breite zu den Graden der Länge aller Orten ihr wahres Verhältnis und damit auch alle Winkel ihre Grösse behalten."

Lagrange, der von dieser Aufgabe in Kenntnis gesetzt und dadurch zu eigenen Untersuchungen angeregt wurde, war es nun, welcher zuerst den Zusammenhang dieses Problemes mit der Theorie der Funktionen komplexer Argumente erkannte. Er teilte Lambert [3]) mit, dass, wenn λ und p die geographische Länge und Breite eines Punktes auf der Kugel, x und y die entsprechenden rechtwinkligen Koordinaten in der Ebene bedeuten,

$x + y\sqrt{-1}$ eine Funktion von $\sqrt{-1}\,\lg \operatorname{tg}(45^0 + \frac{p}{2}) + \lambda$ und ebenso

$x - y\sqrt{-1}$ eine Funktion von $\sqrt{-1}\,\lg \operatorname{tg}(45^0 + \frac{p}{2}) - \lambda$

sein müsse. Einige Jahre später entwickelte er sogar in zwei auf einander folgenden Aufsätzen [4]) mit Hülfe der Funktionen komplexer Argumente die vollständige Theorie der Kartenkonstruktion, wobei er nicht einmal von der Kugelgestalt, sondern von einer beliebigen Rotationsgestalt der Erde ausging.

Das Problem der Abbildung erhielt endlich seine allgemeinste Fassung durch die für das Jahr 1822 von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Kopenhagen gestellte

[1]) Diese Bemerkung stammt von Lagrange: Mémoires de l'académie royale des sciences et belles-lettres 1779 pg. 163.

[2]) „Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten". Beiträge zum Gebrauche der Mathematik. Berlin 1772. III. Teil pg. 105.

[3]) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik. III. Teil pg. 156.

[4]) Sur la construction des cartes géographiques. Mém. d. l'acad roy. d. sciences et belles-lettres. 1779 pg. 161 und pg. 186.

Preisaufgabe: „Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird.“ Die Beantwortung dieser Preisaufgabe erfolgte durch Gauss [1]) in einer Arbeit, die nicht nur für die Theorie der Funktionen komplexer Variablen von Bedeutung ist, sondern auch der fundamentale Ausgangspunkt für die grosse Reihe der in dieses Gebiet einschlagenden Untersuchungen geworden ist. Der Gedankengang der Gauss'schen Abhandlung besteht im wesentlichen in Folgendem:

Die Gleichungen der beiden Flächen mögen die Form besitzen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t, u) \\ y &= \psi(t, u) \\ z &= \chi(t, u) \end{aligned}\right\} \quad 1) \qquad \left.\begin{aligned} X &= \Phi(T, U) \\ Y &= \Psi(T, U) \\ Z &= X(T, U) \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

wobei x, y, z, X, Y, Z rechtwinklige, und t, u, T, U Gauss'sche Koordinaten bedeuten und die Funktionen φ, ψ, χ, Φ, Ψ, X so beschaffen seien, dass jedem Wertepaar t, u resp. T, U ein ganz bestimmtes Wertetripel x, y, z resp. X, Y, Z entspricht und umgekehrt. Alsdann ergibt sich im allgemeinsten Fall für ein beliebiges Bogenelement ds auf der ersten Fläche

$$ds^2 = e\,dt^2 + 2f\,dt\,du + g\,du^2 ,$$

wo e, f, g Funktionen von t, u sind, die man aus den Gleichungen 1) durch partielle Differentiation leicht ermitteln kann. Nun ist es für die Lösung der vorgeschriebenen Aufgabe von der grössten Wichtigkeit zu zeigen, dass sich die willkürlichen Parameter t, u stets auf unendlich viele Arten durch andere Parameter p, q ersetzen lassen, die so beschaffen sind, dass ds^2 die einfache Form

$$ds^2 = n\,(dp^2 + dq^2) = (\sqrt{n}\,dp)^2 + (\sqrt{n}\,dq)^2$$

annimmt, oder mit andern Worten, dass man in jeder Fläche auf unendlich viele Arten solche orthogonale Parameterlinien einführen kann, welche die Fläche in Quadrate einteilen. Der Beweis dieses Satzes, den Gauss allerdings nicht gerade

[1]) Gauss Werke Bd. IV pg. 193 und Schumachers astronomische Abhandlungen III. Heft 1825 pg. 5.

in dieser Form ausgesprochen hat, beruht auf der Integration der linearen Differentialgleichung

$$\sqrt{e}\,dt + \frac{f + i\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{e}}\,du = 0\,, \qquad 3)$$

von der wir wissen, dass sie stets ein Integral mit einer willkürlichen Konstanten besitzt. Ist die linke Seite kein vollständiges Differential, so gibt es immer einen integrirenden Faktor $\mu + \nu\, i$, wo μ und ν Funktionen von t, u sind, durch den dieser Übelstand beseitigt wird, so dass man also die Gleichungen hat:

$$(\mu + \nu\, i)\left\{\sqrt{e}\,dt + \frac{f + i\sqrt{e\,g - f^2}}{\sqrt{e}}\right\} du = d\,(p + iq)$$

$$(\mu - \nu\, i)\left\{\sqrt{e}\,dt + \frac{f - i\sqrt{e\,g - f^2}}{\sqrt{e}}\right\} du = d\,(p - iq)\quad .$$

Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen mit einander erhält man:

$$(\mu^2 + \nu^2)\,ds^2 = dp^2 + dq^2\,, \text{ woraus folgt:}$$

$$ds^2 = n\,(dp^2 + dq^2), \text{ wobei}$$

$$n = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}\quad . \qquad 4)$$

Der Grund, warum es auf einer Fläche unendlich viele orthogonale Kurvensysteme der oben beschriebenen Art gibt, liegt darin, dass jede beliebige Funktion von $\mu + \nu\, i$ ebenfalls ein integrirender Faktor ist. Aus der Differentialgleichung 3) erhält man also p und q als Funktionen von t, u; daraus können wir uns umgekehrt t und u als Funktionen von p, q berechnet und diese Werte in die Gleichungen 1) und 4) eingesetzt denken, wodurch sich auch x, y, z und n als Funktionen von p, q ergeben. Wir dürfen also von vornherein die Annahme machen, dass die Gleichungen der beiden Flächen, die wir in der verlangten Weise auf einander abbilden wollen, durch solche Parameter p, q dargestellt seien, etwa in der Weise, dass

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1\,(p, q)\\ y &= \psi_1\,(p, q)\\ z &= \chi_1\,(p, q)\end{aligned}\right\}\ \text{I} \qquad \left.\begin{aligned} X &= \Phi_1\,(P, Q)\\ Y &= \Psi_1\,(P, Q)\\ Z &= X_1\,(P, Q)\end{aligned}\right\}\ \text{II}$$

sei, woraus dann für die Bogenelemente folgt:

$$ds^2 = n\,(dp^2 + dq^2), \qquad dS^2 = N\,(dP^2 + dQ^2) \qquad \text{III)}$$

wo n resp. N bekannte Funktionen von p, q resp. P, Q bedeuten. Sollen nun die beiden Flächen in irgend einer Verwandtschaft zu einander stehen, so müssen zwischen ihren Parametern gewisse Relationen stattfinden, die durch die Gleichungen

$$P = h_1(p, q), \qquad Q = h_2(p, q)$$

angezeigt sein mögen, wodurch wir also auch X, Y, Z, N und dS als Funktionen von p, q betrachten können, und unsere Aufgabe besteht nun darin, die beiden Funktionen h_1 und h_2 so zu bestimmen, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird. Für das Zustandekommen einer solchen Abbildung, die Gauss[1]) bei einer andern Gelegenheit eine „conforme Abbildung oder Übertragung", Siebeck[2]) dagegen eine „isogonale Verwandtschaft" genannt hat, ist notwendig und, wie man leicht sieht, auch hinreichend, dass das Verhältnis $\frac{dS}{ds}$ zweier entsprechender Bogenelemente, also auch

$$\frac{dS^2}{ds^2} = \frac{N}{n} \cdot R, \text{ wobei}$$

$$R = \frac{\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^2\right\} dp^2 + 2\left(\frac{\partial P}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial Q}{\partial q}\right) dp\,dq + \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^2\right\} dq^2}{dp^2 + dq^2}$$

von der Richtung des Elementes ds, d. h. von $\frac{dq}{dp}$ unabhängig sei. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn die Parameter P und Q den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \pm\frac{\partial Q}{\partial q} \text{ und } \frac{\partial P}{\partial q} = \mp\frac{\partial Q}{\partial p}$$

genügen, wo entweder die oberen oder die unteren Zeichen gleichzeitig gelten, das heisst, wenn $P + i\,Q$ eine Funktion des komplexen Argumentes $p + i\,q$ ist. Soll also die Fläche

[1]) Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Abh. d. königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen Bd. II 1843.

[2]) Ueber die graph. Darstellung imaginärer Funktionen. Borchardts Journal Bd. 55, 1858, pg. 228.

I auf die Fläche II conform abgebildet werden, so muss man die Wahl der Funktionen h_1 und h_2 so treffen, dass zwischen den Parametern irgend eine Gleichung von der Form

$$P + i\,Q = F\,(p + i\,q)$$

stattfindet und umgekehrt.

Wenn wir uns nun vergegenwärtigen, wie fruchtbar sich die Einführung der imaginären Argumente für die Mathematik erwiesen hat, und wie schon Eulers Resultate den grossartigsten Erfolg für eine allgemeine Untersuchung der Funktionen komplexer Variablen haben ahnen lassen, so muss es uns einigermassen befremdend erscheinen, dass erst durch Cauchy eine eigentliche Theorie der Funktionen komplexer Argumente begründet worden ist. Er ist auch der erste gewesen, welcher den Begriff der Funktion einer komplexen Veränderlichen erweitert hat, ohne freilich viel damit gewonnen zu haben. Schon d'Alembert[1]) und Euler[2]) hatten nämlich den Satz bewiesen, dass jeder analytische Ausdruck, also jede Funktion von $z = x + i\,y$ sich auf die Form $M + i\,N$ bringen lasse, wo M und N reelle Funktionen der beiden Veränderlichen x, y bedeuten; dass aber das Umgekehrte nicht immer stattfand, war selbstverständlich. Gleichwohl nannte Cauchy[3]) jede komplexe Funktion der beiden Variablen x, y, also jeden Ausdruck von der Form

$$w = \varphi\,(x, y) + i\,\psi\,(x, y),$$

von welcher Beschaffenheit derselbe auch sein mochte, eine Funktion des komplexen Argumentes $z = x + i\,y$, sobald nur φ und ψ bestimmte analytische Ausdrücke bedeuteten. Er war zu dieser Erweiterung insofern berechtigt, als dieselbe bereits für die Funktionen reeller Veränderlichen in der Dirichlet'schen Definition gemacht worden war, worin eine Grösse X dann als eine Funktion von x bezeichnet wurde,

[1]) Recherches sur le calcul intégral. I. Partie. Mémoires de l'acad. roy. des sciences et des belles-lettres 1746.

[2]) Recherches sur les racines imaginaires des équations. Mém. de l'acad. roy. d. sciences et d. belles-lettres. 1749 pg. 288.

[3]) Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome IV. 1847 p. 309. Vgl. auch: Comptes rendus des séances de l'acad. des sciences T. 32. (1851) pg. 161.

wenn jedem Werte von x ein oder mehrere Werte von X zugeordnet waren, mochte nun das Abhängigkeitsverhältnis durch eine mathematische Formel gegeben oder nach Willkür angenommen sein. In der Tat entsprechen nach der Cauchy'schen Definition vermöge der Ausdrücke φ und ψ jedem Wert von z ein oder auch mehrere Werte von w, da mit z auch x und y gegeben sind; oder wenn wir uns die Werte von z in der bekannten Weise durch die Punkte einer Ebene dargestellt denken, und ebenso die Punkte einer andern Ebene, denen wir die rechtwinkligen Koordinaten φ und ψ beilegen, als Repräsentanten der Werte von w auffassen, so ist mit der Lage von z auch diejenige von w bestimmt. Nun ist aber für die Funktionen reeller Argumente charakteristisch, dass alle stetigen Funktionen, bei denen $\lim \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$ von der Art und Weise, wie δ unendlich klein wird, unabhängig ist, einen Differentialquotienten besitzen. Für die stetigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen ist diese Bedingung nicht mehr hinreichend, es tritt vielmehr noch die weitere Forderung hinzu, dass

$$\lim \frac{f(z+\delta)-f(z)}{\delta} = \frac{dw}{dz},$$

also das Verhältnis zweier entsprechender Linienelemente von der Richtung des Inkrementes dz, das ist von $\frac{dy}{dx}$ unabhängig sei; oder mit andern Worten: es muss nach der Gauss'schen Theorie die Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene eine conforme sein. Hiezu ist notwendig und hinreichend, dass φ und ψ den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad 1)$$

Genüge leisten, oder, was dasselbe besagt, dass die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x} \qquad 2)$$

erfüllt sei. Dies findet dann, aber auch nur dann statt, wenn $w = \varphi + i\psi$ ein analytischer Ausdruck von z ist, woraus folgt, dass eine Funktion des komplexen Argumentes $z = x + iy$

im Cauchy'schen Sinne im allgemeinen nur dann einen Differentialquotienten hat, wenn sie in analytischer Form gegeben ist. Diese spezielle Klasse von Funktionen hat Cauchy[1]) als „*fonctions monogènes*“ bezeichnet und ausschliesslich auf diesen Begriff seine Funktionentheorie aufgebaut. Nur durch diese Einschränkung konnte man wesentlich neue Resultate erreichen, zu denen man durch das Studium der Funktionen zweier reeller Variablen allein nicht hätte gelangen können.

Aus den Differentialgleichungen 1) folgen unmittelbar noch die zwei weiteren:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \qquad 3)$$

oder, wie man der Kürze halber oft schreibt,

$$\Delta \varphi = 0 \quad , \quad \Delta \psi = 0 ;$$

d. h. sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil einer jeden monogenen Funktion genügt einer und derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Dieser Satz gestattet jedoch keine Umkehrung; daraus, dass φ und ψ irgend zwei Integrale der Differentialgleichung 3) sind, folgt durchaus nicht, dass $\varphi + i\,\psi$ eine monogene Funktion des komplexen Argumentes $x + i\,y$ ist; es zeigt sich vielmehr, dass zwar jedes Integral φ der Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ als reeller oder imaginärer Teil einer monogenen Funktion der komplexen Veränderlichen $x + i\,y$ aufgefasst werden kann, dass dann aber auch der andere Teil ψ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist und sich aus den Differentialgleichungen 1) in der Form

$$\psi = \pm \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy \mp \int \left\{ \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} dx + C$$

berechnen lässt, wobei die obern oder die untern Zeichen berücksichtigt werden müssen, je nachdem φ als reeller oder imaginärer bezw. ψ als imaginärer oder reeller Bestandtei der monogenen Funktion von $x + i\,y$ angenommen wird.

Im Folgenden möge nun, wo nichts anderes beigefügt

[1]) Exercices d'analyse et de physique mathématique. T. IV. (1847). pg. 346 und Comptes rendus. T. 32 (1851) pg. 484.

ist, der Einfachheit wegen unter Funktion stets eine monogene Funktion verstanden sein.

Der enorme Fortschritt, den die Mathematik in der Theorie des Imaginären aufweist, liegt nicht in der Einführung jenes mystischen „i“, sondern in dem Umstand, dass man mit der unabhängigen Veränderlichen aus einer Dimension in zwei Dimensionen übergegangen ist. Eine Funktionentheorie lediglich auf Grund reeller Argumente hätte zu keinem befriedigenden Abschluss gebracht werden können; auf Eulers grossartige Leistungen hätte man verzichten müssen; von der Periode der Exponentialfunktionen und der damit zusammenhängenden unendlichen Vieldeutigkeit der Logarithmen hätte die Mathematik keine Kenntnis erhalten; ebensowenig wäre es möglich gewesen, die Natur der trigonometrischen Funktionen vollständig zu erkennen. Als Beleg für letzteres sei erwähnt, dass der Sinus für reelle Argumente nur die Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt, eine Eigenschaft, die völlig in den Hintergrund tritt, sobald man auch imaginäre Argumente in Betracht zieht, denn da zeigt es sich, dass der Sinus jeden Wert annehmen kann. Die Theorie der elliptischen Funktionen vollends wäre nicht über ihre ersten Anfänge hinausgekommen, da man allein mit Hülfe des Imaginären ihre wichtigste Eigenschaft, die doppelte Periodizität, nachzuweisen im stande war.

Sehr treffend sagt Dirichlet[1]) in der Gedächtnisrede auf Jacobi: „Ein zweiter, Abel und Jacobi gemeinsamer Gedanke, der Gedanke, das Imaginäre in diese Theorie einzuführen, war noch von grösserer Bedeutung, und Jacobi hat es später oft wiederholt, dass die Einführung des Imaginären allein alle Rätsel der früheren Theorie gelöst habe. Wäre es nicht eine so alte Erfahrung, dass das Naheliegende sich immer fast zuletzt darbietet, so würde man es auffallend finden müssen, dass dieser Gedanke Euler entgangen ist, zu dessen frühesten und schönsten Leistungen es gehört, die Theorie der Kreisfunktionen, indem er diese als imaginäre Exponentialgrössen behandelte, in solchem Grade vereinfacht und erweitert zu

[1]) Jacobis ges. Werke Bd. I pg. 10.

haben, dass fast das ganze Gebiet der Analysis eine wesentliche Umgestaltung dadurch erfuhr."

Ja es lässt sich geradezu behaupten, dass die Funktionentheorie dem Gedanken, die unabhängige Veränderliche auf ein zweidimensionales Gebilde auszudehnen, überhaupt ihre Entstehung verdankt. Der Begriff der eindeutigen und der mehrdeutigen Funktion, so wie man ihn bisher definirt hatte, genügte nicht mehr. Während man früher eine Funktion $f(z)$ dann eindeutig resp. mehrdeutig genannt hatte, wenn jedem Wert von z ein einziger resp. mehrere Werte von $f(z)$ entsprachen, so unterschied Cauchy zwischen Funktionen, die in einem gewissen *Gebiet* eindeutig resp. mehrdeutig waren. Diese Erweiterung war nur möglich, als nicht mehr die gerade Linie, sondern die Ebene als Träger der unabhängigen Veränderlichen angesehen wurde. Nach Cauchy [1]) bezeichnet man eine eindeutige Funktion als „*fonction monodrome*", nach Riemann [2]) als „*einändrige* Funktion" und nach Briot und Bouquet [3]) als „*fonction monotrope*", Benennungen, die alle in vortrefflicher Weise den Sinn der Cauchy'schen Definition wiedergeben. Eine Funktion wird nämlich dann eindeutig innerhalb eines gewissen Gebietes genannt, wenn man, von einem beliebigen Punkt z_0 dieses Gebietes ausgehend, durch stetige Fortsetzung in irgend einem andern Punkt z desselben Gebietes stets mit dem gleichen Funktionswert anlangt, auf welcher Kurve innerhalb desselben man auch die stetige Fortsetzung vollziehen möge.

Sodann hat Cauchy [4]) für Funktionen komplexer Argumente den Begriff eines bestimmten Integrals längs einer gegebenen Kurve aufgestellt und gefunden, dass der Wert eines solchen von der Integrationskurve unabhängig ist, so lange dieselbe ganz in dem Gebiet verläuft, in welchem die Funktion unter dem Integralzeichen eindeutig, endlich und

[1]) Exercices d'analyse et de physique mathématique T. IV (1847) pg. 345.

[2]) Gesammelte mathematische Werke. Leipzig 1876, pg. 83.

[3]) Théorie des fonctions elliptiques. IIme édition. 1875. pg. 10.

[4]) Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris 1825.

stetig bleibt, oder, wie er sich an einer andern Stelle[1]) ausdrückt, dass das Integral einer Funktion $f(z)$, erstreckt über sämtliche Randkurven eines Gebietes, innerhalb dessen $f(z)$ eindeutig, endlich und stetig ist, den Wert null hat. Abgesehen davon, dass dieser Satz, wie er in der ersten Form ausgesprochen ist, mit Vorteil dazu benützt werden kann, eine Menge bestimmter Integrale auf die einfachste und eleganteste Weise zu berechnen, ist er vielleicht der fruchtbarste in der ganzen Analysis; denn die Folgerungen, die man daraus ziehen kann, sind so zahlreich und von so weittragender Bedeutung, dass sich ihm in dieser Hinsicht kaum ein anderer Satz zur Seite stellen lässt.

Um diese Behauptung zu rechtfertigen, mögen hier in Kürze einige der wichtigsten Anwendungen folgen, die zugleich dazu dienen sollen, den Unterschied zwischen einer Mathematik, die sich nur auf reelle Grössen beschränkt, und einer solchen, die auf dem Gebiete des Komplexen entstanden ist, in klarer Weise hervortreten zu lassen.

Wenn eine Funktion $f(z)$ für alle Punkte auf der Begrenzung eines Gebietes gegeben ist und innerhalb desselben eindeutig, endlich und stetig vorausgesetzt wird, so ist damit auch $f(z)$ für alle Punkte z im Innern dieses Gebietes bekannt und lässt sich mit Hülfe der Gleichung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t - z} dt$$

berechnen, wo das Integral längs der Begrenzung des betreffenden Gebietes zu nehmen ist. Dieser Satz besitzt hinsichtlich der Funktionen reeller Variablen kein Analogon. Aus der angeführten Formel ergibt sich dann unmittelbar das überaus wichtige Cauchy-Taylor'sche Theorem[2]), nach welchem jede Funktion $f(z)$ um einen beliebigen Punkt a des Gebietes, innerhalb dessen $f(z)$ eindeutig, endlich und stetig ist, nach dem Taylor'schen Satz in eine konvergente Reihe nach steigen-

[1]) Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée. Comptes rendus. T 23. (1846) pg. 254.

[2]) Formules pour le développement des fonctions en séries. Exerc. d'anal. et de phys. math. T II. (1841) pg. 50.

den Potenzen von (z - a) entwickelt werden kann. Hierin zeigt sich wiederum ein ganz bedeutender Unterschied gegenüber den Funktionen reeller Variablen, für welche der Taylor'sche Satz lautet:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2\,!}\,(x-a)^2 + \ldots\ldots\ldots + R_n$$

und wobei die Entwicklung für alle Werte von x gilt, für die $f(x)$ nebst seinen Ableitungen eindeutig, endlich und stetig ist, und welche so nahe bei a liegen, dass $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ wird. In jedem einzelnen Fall musste man aber die Reihe immer erst auf ihre Konvergenz prüfen und erst, wenn der Beweis dafür erbracht war, hatte man die Berechtigung, R_n wegzulassen. Anders verhält es sich mit den Funktionen komplexer Argumente: hier lässt sich unmittelbar angeben, wie weit sich die Konvergenz der Reihe erstreckt, nämlich auf jeden Punkt z, welcher von a weniger weit absteht, als der nächste Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt, oder, wie Cauchy[1]) sagt, als der nächste „singuläre" Punkt, und daher fällt das Restglied von selbst ausser Betracht. Dies lässt sich nun ohne weiteres auf Funktionen reeller Argumente übertragen. Ist die Entwicklung für komplexe Veränderliche innerhalb eines mit dem Radius r um a geschlagenen Kreises gültig, so behält sie selbstverständlich für alle reellen Werte der Veränderlichen, die in dem Intervall (a - r) bis (a + r) liegen, ihre Gültigkeit bei, und das Restglied braucht nicht mehr berücksichtigt zu werden.

Cauchy war überhaupt der erste, welcher in strenger Weise die Konvergenz der Taylor'schen Reihe für reelle Argumente untersuchte; denn Lagrange[2]) begnügte sich damit, die Grenzen für das Restglied R_n aufzustellen und die Entwicklung nur dann für ungültig zu erklären, wenn diese Grenzen einen unendlich grossen Wert erlangten. Cauchy[3]) wies darauf hin, dass die Entwicklung

---

[1]) Exercices d'anal. et de phys. math. T IV. 1847. pg. 327.

[2]) Leçons sur le calcul des fonctions. Paris. 1806. pg. 98.

[3]) Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. Paris. 1823. pg. 145.

$$f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots.$$

nur in dem Fall $f(x+h)$ zur Summe habe, wenn sie konvergent sei. Auch über andere unendliche Reihen wurden vor ihm nur selten Konvergenzbetrachtungen angestellt; man rechnete mit denselben gerade so, wie wenn es endliche Grössen wären und kam dadurch oft zu Resultaten, die an Paradoxien nichts zu wünschen übrig liessen. So hat schon Leibniz[1]) den Bruch $\frac{1}{1-x}$ in die Reihe $1+x+x^2+x^3+\ldots.$ entwickelt und für $x=-1$ das merkwürdige Resultat

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} &= 1-1+1-1+1-1+\ldots.\\ &= 0+0+0+\ldots.\end{aligned}$$

erhalten. Hievon ausgehend erklärte der italienische Mathematiker Guido Grandi[2]) die Erschaffung der Welt aus nichts. Sogar die Konvergenz der so wichtigen binomischen Reihe wurde erst von Abel[3]) einer genauen Untersuchung unterworfen; er war sich aber auch voll und ganz bewusst, wie notwendig es sei, sich stets von der Konvergenz jeder unendlichen Reihe zu überzeugen, ehe man dieselbe irgendwie verwerte. Seinem Freund Holmbœ schrieb er am 16. Januar 1826 über diesen Punkt folgendes[4]): „Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on se soit avisé d'y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheur et qui ont enfanté tant de paradoxes .... Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception des cas les plus simples,

[1]) Montucla: Histoire des mathématiques. Tome III. pg. 231.

[2]) Quadratura circuli et hyperbolæ per infinitas hyperbolas et parabolas quadrabiles geometrice exhibita. Editio altera. Pisis 1710. pg. 34. „Quo sane exemplo constat, etiam concipi posse, Dei Opt. Max. infinitam virtutem eo se extendere, ut quidvis in nihilum redigere, quidvis ex nihilo producere valeat, adeoque per creationem proprie dictam potuisse mundi hujus aspectabilis materiam e nihili sinu excitare."

[3]) Crelles Journal Bd. 1. pag. 311.

[4]) Oeuvres complètes de N. H. Abel. Christiania 1839. Tome II. pg. 266.

par exemple les séries géométriques il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie, dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse, c'est à dire, la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement."

Unter diesen Umständen musste es doppelt erwünscht erscheinen, in dem Cauchy'schen Theorem ein so einfaches und sicheres Kriterium für die Konvergenz der allgemeinen Taylor'schen Reihe gefunden zu haben.

Funktionen, die innerhalb eines gewissen Gebietes eindeutig, endlich und stetig sind und daher in der Umgebung eines jeden Punktes a desselben nach steigenden Potenzen von $(z - a)$ entwickelt werden können, heissen nach Cauchy[1]) *„fonctions synectiques"*; Briot und Bouquet[2]) wählen dafür die Bezeichnung *„fonctions holomorphes"*, um anzudeuten, dass sie in diesem Gebiet den Charakter ganzer Funktionen an sich tragen; ist dagegen eine Funktion $f(z)$ in einem gewissen Gebiete holomorph mit Ausnahme einiger Punkte, in denen sie so unendlich wird, dass $\frac{1}{f(z)}$ in dem ganzen Gebiet holomorph ist, so nennen sie dieselbe in dem betreffenden Gebiet eine *„fonction méromorphe"*, weil sie sich daselbst wie ein rationaler Bruch verhält.

Das Cauchy - Taylor'sche Theorem gestattet nun auch, mit Leichtigkeit jede meromorphe Funktion $f(z)$ in der Umgebung eines Unendlichkeitspunktes a in eine nach ganzen Potenzen von $(z - a)$ fortschreitende Reihe zu entwickeln, worin zwar nicht alle Glieder positive, aber doch nur eine beschränkte Anzahl Glieder negative Exponenten besitzen. Es lässt sich daher stets eine solche rationale Funktion von $f(z)$ subtrahiren, dass die Differenz in der Umgebung von a holomorph ist, woraus als Spezialfall die Zerlegung rationaler Funktionen in Partialbrüche hervorgeht. Wird $f(z)$ in a unendlich von der n^{ten} Ordnung, so lautet die Entwicklung:

---

[1]) Sur les rapports différentiels des quantités géométriques et sur les intégrales synectiques des équations différentielles. Comptes rendus T. 40 (1855) pg. 447.

[2]) Théorie des fonctions elliptiques. II. éd. 1875 pg. 14 et 15.

$$f(z) - \sum_{\nu=-n}^{\infty} A_\nu (z-a)^\nu .$$

Dabei ist es vor allem der Koeffizient A_{-1}, welcher sehr bemerkenswerte Eigenschaften aufweist; er ist diejenige Grösse, welche Cauchy[1]) unter dem Namen des „*Residuums*“ der Funktion $f(z)$ in Bezug auf den Unendlichkeitspunkt a in die Analysis eingeführt hat. Bildet man nämlich das Integral von $f(z)dz$ längs einer geschlossenen Kurve K, welche a als einzigen singulären Punkt einschliesst, so ist

$$A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z)\, dz = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z);$$

liegen aber innerhalb der geschlossenen Kurve K mehrere singuläre Punkte a, b, ..., so ist allgemein[2])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K f(z)dz = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=b} f(z) + \ldots . \qquad \text{I.}$$

Ganz besondere Beachtung verdient die Summe der Residuen der logarithmischen Ableitung einer meromorphen Funktion $f(z)$, da diese Summe mit den Null- und den Unendlichkeitsstellen von $f(z)$ in einfachstem Zusammenhang steht; denn bezeichnet m die Anzahl der einfachen Nullstellen und n diejenige der einfachen Unendlichkeitsstellen von $f(z)$ innerhalb der geschlossenen Kurve K, so besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = m - n \qquad \text{II.}$$

Die in I und II enthaltenen Sätze sind für die Analysis von der grössten Bedeutung. So führt beispielsweise eine Anwendung der Formel I auf die eindeutigen doppeltperiodischen Funktionen zu dem Resultat, dass die Summe ihrer Residuen gleich null ist und also ihre Ordnung nicht unter 2 herabsinken kann; aus Formel II folgt ebenfalls auf die einfachste Weise, dass jede eindeutige doppeltperiodische

[1]) Vgl. Exercices d'anal. et de phys. math. T. II. (1841) pg. 63.

[2]) Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires. Comptes rendus. T. 23. (1846) pg. 693.

Funktion innerhalb eines Periodenparallelogrammes eben so oft null als unendlich wird und daher auch jeden beliebigen Wert eben so oft annimmt, als den Wert 0 oder ∞. Dies sind lauter Sätze, die in der Theorie der elliptischen Funktionen eine Hauptrolle spielen. Daneben finden die Gleichungen I und II auch direkte Anwendung; es sei nur daran erinnert, dass man mit Formel II unter anderem berechnet, wie viele Nullstellen die Funktion $\vartheta_1(z)$ innerhalb eines Periodenparallelogrammes besitzt. Kurz, es bilden die Residuensätze ein sehr wertvolles Mittel zur Erforschung mathematischer Gesetze.

Mit Hülfe der von Cauchy aufgestellten Theorie der Funktionen komplexer Argumente ist es also möglich, Funktionen zu untersuchen, ohne dass ein fertiger Ausdruck für dieselben vorliegt. Früher hatte man aus dem gegebenen arithmetischen Ausdruck die Eigenschaften der Funktion abgeleitet; jetzt sind die Probleme gewissermassen umgekehrter Natur: es werden funktionale Eigenschaften vorgeschrieben, und dann stellt man sich die Aufgabe, die Funktion so zu konstruiren, dass sie jene vorgeschriebenen Eigenschaften besitzt. Wird von einer Funktion etwa verlangt, dass sie vollkommen bestimmt, eindeutig, endlich und stetig sei für alle endlichen Werte von z mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten, in denen sie unendlich werden soll von endlicher, vorgeschriebener Ordnung, so muss sie rational sein. Oder ist die Aufgabe vorgelegt, eine doppeltperiodische Funktion beliebig hoher Ordnung herzustellen, deren Perioden, Null- und Unendlichkeitsstellen vorgeschrieben sind, so kann dies stets durch Thetafunktionen mit denselben Perioden geschehen.

Wenn nun auch Cauchy als Begründer der Theorie der Funktionen komplexer Variablen anzusehen ist, so muss doch bemerkt werden, dass Gauss die Hauptsätze der neueren Funktionentheorie schon gekannt hat, lange bevor Cauchys Untersuchungen über die auf komplexem Wege gewonnenen Integrale an die Öffentlichkeit gelangt sind (1825). Es geht dies unzweifelhaft aus dem früher zitirten Brief hervor, den Gauss am 18. Dezember 1811 an Bessel geschrieben hat; er

erläutert darin ebenfalls den Begriff der Integrale von Funktionen komplexer Variablen und sagt dann weiter: „Ich behaupte nun, dass das Integral $\int \varphi(x)dx$ nach zwei verschiedenen Übergängen immer einerlei Wert erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi(x) = \infty$ wird. Hierbei ist noch angenommen, dass $\varphi(x)$ selbst eine einförmige Funktion von x ist, oder wenigstens für deren Werte innerhalb jenes ganzen Flächenraumes nur ein System von Werten ohne Unterbrechung der Stetigkeit angenommen wird."

„Dies ist ein sehr schöner Lehrsatz, dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde. Er hängt mit schönen anderen Wahrheiten die Entwickelungen in Reihen betreffend zusammen . . . Übrigens ist zugleich hieraus klar, wie eine durch $\int \varphi(x)dx$ erzeugte Funktion für einerlei Werte von x mehrere Werte haben kann, indem man nämlich beim Übergange dahin um einen solchen Punkt, wo $\varphi(x) = \infty$, entweder gar nicht, oder einmal, oder mehrere Male herumgehen kann." Es hatte also Gauss durch Integration auf der Ebene der komplexen Zahlen sogar schon die Periodizität von Funktionen erkannt.

Die von Cauchy begründete Theorie der Funktionen komplexer Argumente wurde nun besonders von Laurent, Liouville, Puiseux, Briot und Bouquet weiter ausgebildet, jedoch ohne dass die bisherigen Grundlagen wesentliche Veränderungen erlitten hätten; dies trat erst mit Riemann ein, welcher durch seine genialen Ideen die Fundamente der Funktionentheorie zum Teil umgestaltet, zum Teil geradezu neu geschaffen hat.

Riemann legt seinen „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse" einen Funktionsbegriff zu Grunde, der nicht notwendig in Form eines analytischen Ausdruckes gegeben zu sein braucht, sondern nur das Merkmal an sich trägt, welches allen irgendwie durch Grössenoperationen bestimmbaren Funktionen gemeinsam ist, nämlich einen Differentialquotienten zu besitzen,

der von der Richtung des Inkrementes dz unabhängig ist. Er definirt daher folgendermassen[1]):

„Eine veränderliche complexe Grösse w heisst eine Funktion einer andern veränderlichen komplexen Grösse z, wenn sie mit ihr sich so ändert, dass der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Wert des Differentials dz ist," oder wie er an einer andern Stelle[2]) sagt: „Als Funktion von $x + y\,i$ betrachte ich jede Grösse w, die sich mit ihr der Gleichung

$$i\,\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

gemäss ändert, ohne einen Ausdruck von w durch x und y vorauszusetzen." Aus dieser Differentialgleichung schliesst dann Riemann auf die Darstellbarkeit der Grösse w durch eine nach positiven, ganzen Potenzen von $(z - a)$ fortschreitende Reihe, sobald w in der Umgebung von a einen einzigen bestimmten, mit z sich stetig ändernden Wert hat.

Obgleich nach dieser Definition die Funktion w nicht notwendig ein arithmetischer Ausdruck in x und y sein muss, so steht es uns doch nicht frei, die Werte von $u + i\,v$, welche den Punkten z zugehören sollen, völlig willkürlich zu wählen, vielmehr müssen die Wertepaare u, v den in der Definition geforderten Bedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Genüge leisten; das heisst aber: mit der Wahl der einen Koordinate ist auch die andere bis auf eine additive Konstante bestimmt. Diese Tatsache verdient besonders hervorgehoben zu werden, da sie einen wesentlichen Unterschied bildet zwischen der Riemann'schen Definition und derjenigen, welche Dirichlet für die Funktionen reeller Argumente gegeben hat. Betrachten wir u und v als analytische Ausdrücke in x und y, so ist der Riemann'sche Funktionsbegriff

---

[1]) Gesammelte mathematische Werke. Leipzig 1876. pg. 5.

[2]) l. c. pg. 81.

identisch mit dem der monogenen Funktion einer komplexen Variablen.

Riemanns epochemachende Neuerungen, welche die moderne Funktionentheorie seinem schöpferischen Geiste verdankt, finden nun grösstenteils ihren Ursprung in dem einen Gedanken, den Ort der unabhängigen Veränderlichen durch eine gewisse Übereinanderlagerung von Flächen so umzugestalten, dass jede mehrdeutige Funktion zu einer eindeutigen Funktion des Ortes auf diesem geometrischen Gebilde wird.

Ist allgemein eine algebraische Funktion s durch die Gleichung $F(z,s) = 0$ definirt, wobei unter $F(z,s)$ eine ganze, irreduktible Funktion n^{ten} Grades in s zu verstehen ist, so gehört zu der Funktion s eine n-blättrige Riemann'sche Fläche, die man auf folgende Weise konstruirt: Zunächst wird jedem Blatt ein bestimmter Funktionszweig zugeordnet und alsdann zu jedem Wert von z das zugehörige s für jedes Blatt berechnet, so dass jedem Punkt des Gebildes ein einziges, wohl bestimmtes Wertepaar (z, s) entspricht; diese sämtlichen Wertsysteme (z, s) denkt man sich den betreffenden Punkten des Gebildes zugeordnet. Nun sucht man alle singulären Stellen heraus, in deren Umgebung die Eindeutigkeit von s nicht mehr erhalten bleibt, indem man beachtet, dass dieselben nur da vorkommen, wo mehrere Werte von s entweder zusammenfallen oder unendlich werden. Hieraus lässt sich unmittelbar der Schluss ziehen, dass die Punkte, in denen die Funktion s die eben beschriebene Eigenschaft besitzt und welche Riemann [1]) „*Verzweigungsstellen*“ nennt, nur in endlicher Anzahl vorhanden sein können; denn erstens gilt der Satz, dass eine algebraische Funktion stets nur eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen aufweist; zweitens kann nur in der Nähe solcher Punkte (z, s) eine Verzweigung stattfinden, in denen neben $F(z,s) = 0$ auch noch die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$ erfüllt ist, oder mit andern Worten: es können nur für solche z mehrere Werte von s zusammenfallen, für welche die Diskriminante von F verschwindet; diese ist aber eine ganze ra-

[1]) l. c. pg. 83.

tionale Funktion von z und besitzt also eine endliche Anzahl von Wurzeln. Umgekehrt sind jedoch nicht alle Punkte (z, s), in denen mehrere Werte von s zusammenfallen oder unendlich gross werden, Verzweigungsstellen, d. h. Punkte, bei deren Umkreisung ein Zweig der Funktion s sich in einen andern fortsetzt. Ist für ein bestimmtes Wertsystem (z, s)

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0 \text{ und } \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \gtrless 0 ,$$

so ist dieser Punkt, wie Riemann[1]) nachgewiesen hat, nur dann eine Verzweigungsstelle, wenn in demselben $\frac{\partial F}{\partial z}$ von null verschieden ist: zugleich ist dies eine Verzweigungsstelle einfachster Art. Würde dagegen im Punkt (z, s) auch $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ so fände daselbst keine Verzweigung statt. Wäre $\frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0$, so würde in (z, s) die Verzweigung komplizirterer Art sein.

Hat man die Verzweigungsstellen der Funktion herausgesucht, so werden von denselben sich nicht schneidende, im übrigen aber beliebige Linien, die man sich vorderhand als unüberschreitbar zu denken hat, ins Unendliche gezogen; doch können sie auch so geführt werden, dass sie, statt ins Unendliche zu gehen, je 2 Verzweigungsstellen mit einander verbinden. Durch diese „*Verzweigungsschnitte*“ hat man erreicht, dass in den zerschnittenen Blättern jeder Zweig eine eindeutige Funktion des Ortes in seinem zugehörigen Blatte ist, da es jetzt keine geschlossene Linie mehr gibt, welche eine Verzweigungsstelle enthält, und somit jeder Zweig beim Durchlaufen irgend einer geschlossenen Bahn wieder in seinen Ausgangswert zurückkehrt.

Allein auf diese Weise ist es doch nur möglich, jeden Zweig für sich zu untersuchen, so dass die bisherigen Be-

[1]) Theorie der Abel'schen Funktionen (Ges. Werke. pg. 81—135) I. Abteilung § 6. Vgl. auch Roch: Über Funktionen komplexer Grössen. Schlömilch'sche Zeitschrift Bd. 10 (1865) pg. 169.

trachtungen gegenüber den Cauchy'schen tatsächlich nicht den geringsten Vorteil bieten. Hier hilft aber der geniale Gedanke Riemanns: man heftet die Blätter längs ihrer Verzweigungsschnitte ebenso zusammen, wie die Funktionszweige bei Umkreisung der Verzweigungsstellen in einander übergehen, und dann ist man im stande, mittelst der so konstruirten *„Riemann'schen Fläche"* jede algebraische Funktion in ihrer ganzen Vollständigkeit als eindeutige Funktion des Ortes der unabhängigen Variablen zu studiren; denn jetzt besteht auch für mehrdeutige Funktionen der früher bloss für eindeutige geltende Satz, dass die Funktion auf irgend zwei, von demselben Punkt P ausgehenden und zu demselben Punkt Q hinführenden Wegen in Q stets mit demselben Wert anlangt.

Es ist von vornherein klar, dass die Einführung der Riemann'schen Fläche als Ort der unabhängigen Veränderlichen auch eine entsprechende Verallgemeinerung der von Cauchy aufgestellten Gesetze zur Folge haben musste; doch ist eine solche Erweiterung nur da notwendig, wo die Funktion in der Umgebung einer Verzweigungsstelle betrachtet wird, während für alle andern Punkte die Cauchy'schen Sätze in unveränderter Form beibehalten werden können, da sie sich auf Flächenteile beziehen, die nur der Bedingung, keine Verzweigungsstellen einzuschliessen, unterworfen sind.

Vor allem ist zu bemerken, dass in der Nähe einer Verzweigungsstelle a, in welcher m Blätter zusammenhängen (nach Riemann[1]) werden solche Verzweigungsstellen als *„Windungspunkte (m-1)ter Ordnung"* bezeichnet), jede mehrdeutige Funktion $f(z)$ sich in der Form

$$\sum_{\lambda=+\mu}^{\infty} A_\lambda (z-a)^{\frac{\lambda}{m}}$$

darstellen lässt, wobei als untere Grenze $+\mu$ oder $-\mu$ zu wählen ist, je nachdem $f(z)$ im Punkt a von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$ null oder unendlich wird. C. Neumann[2]) nennt diese

[1]) Ges. math. Werke. pg. 8.

[2]) Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abel'schen Integrale, II. Aufl. Leipzig 1884. pg. 109.

für das Verhalten der Funktion $f(z)$ im Punkt $z = a$ charakteristische Zahl $\pm \mu$ *„die Ordnungszahl der Funktion f im Punkt* a." Man erkennt unmittelbar, dass die Entwicklung von $f(z)$ um irgend einen andern Punkt der Riemann'schen Fläche gleichfalls die eben angegebene Form besitzen muss; denn ist a keine Verzweigungsstelle, so hat man $m = 1$ zu setzen, und die untere Grenze von λ wird in jedem Nullpunkt positiv, in jedem Unendlichkeitspunkt negativ und in jedem andern Punkt null sein.

Auch hier spielt der Koeffizient von $(z-a)^{-1}$ (in obiger Entwicklung die Grösse A_{-m}) dieselbe wichtige Rolle wie bei den meromorphen Funktionen; es besteht nämlich zwischen A_{-m} und $\int f(z)\,dz$, genommen längs einer geschlossenen Kurve K, die als einzigen Unstetigkeitspunkt einen Windungspunkt $(m-1)^{ter}$ Ordnung einschliesst, ebenfalls eine gewisse Beziehung, welche durch die Gleichung

$$m\,A_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)\,dz = m \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

dargestellt ist.

Hiebei ist zu beachten, dass das Residuum von $f(z)$ den Wert null hat in jedem Unendlichkeitspunkt, in welchem der absolute Betrag der zugehörigen Ordnungszahl kleiner ist als die Anzahl der in diesem Punkt zusammenhängenden Blätter. Dass die letzte Gleichung die weiter oben für meromorphe Funktionen angegebene Formel als Spezialfall in sich schliesst, ist sofort ersichtlich, wenn man bedenkt, dass für diese die z - Ebene bloss aus einem Blatte besteht, und daher $m = 1$ ist.

Bezeichnet man ferner mit M die Summe der Ordnungszahlen aller Punkte, die innerhalb einer geschlossenen, einen Flächenteil vollständig begrenzenden Kurve K liegen, so ist

$$M = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\ ,$$

woraus wieder durch Spezialisirung für meromorphe Funktionen die Cauchy'sche Gleichung hervorgeht.

Aus diesen wenigen Beispielen erhellt schon zur Genüge,

wie viel Riemanns geometrische Anschauungen zur Verallgemeinerung der wichtigsten mathematischen Sätze beigetragen haben.

Durch Einführung der Riemann'schen Fläche war man auch im stande, den Begriff eines bestimmten *Abel'schen Integrales* klar zu fassen. Unter einem Abel'schen Integral allgemeinster Art versteht man nämlich das Integral irgend einer rationalen Funktion von z und s, wo s seinerseits eine algebraische Funktion von z bedeutet, die durch die Gleichung $F(z,s) = 0$ definirt sein möge[1]). Ein bestimmtes Abel'sches Integral hat aber keinen Sinn, so lange man als Integrationsgrenzen bloss zwei Werte z_0 und z_1 der unabhängigen Veränderlichen angibt, weil zu jedem Wert von z mehrere Werte von s gehören; vielmehr muss man die Grenzen so fixiren, dass man zu z_0 und z_1 noch je einen der zugehörigen Werte von s angibt, oder, um eine Ausdrucksweise zu gebrauchen, deren sich Clebsch und Gordan[2]) bedienen, es müssen als Grenzen des Integrals stets zwei Punkte der Kurve $F = 0$ gegeben sein; das heisst aber mit andern Worten: ein Abel'sches Integral hat nur dann einen Sinn, wenn man weiss, von welchem Punkt (z_0, s_0) der Riemann'schen Fläche bis zu welchem andern Punkt (z_1, s_1) derselben man zu integriren hat. Indessen eignet sich die Riemann'sche Fläche in ihrer bisherigen Gestalt nur zum Studium algebraischer Funktionen, nicht aber zu demjenigen ihrer Integrale, da dieselben durch Angabe der Grenzen (z_0, s_0) und (z_1, s_1) nicht eindeutig bestimmt, sondern noch vom Integrationswege abhängig sind. Diesem Übelstand hat Riemann durch Einführung seiner *„Querschnitte"* abgeholfen. Es sind dies Linien, welche von einem Begrenzungspunkt der Fläche ausgehen, ihr Inneres einfach durchschneiden und wieder in einem Begrenzungspunkt endigen, wobei noch zu beachten ist, dass man jeden hinzugekommenen Querschnitt als neuen Bestandteil der Begrenzung ansehen muss, so dass also die Querschnitte gerade wie

---

[1]) Clebsch: Vorlesungen über Geometrie. (herg. von Lindemann) Leipzig 1876. pg. 765.

[2]) Theorie der Abel'schen Funktionen. Leipzig 1866. pg. 2.

die ursprünglichen Begrenzungslinien für die unabhängige Veränderliche z unüberschreitbare Kanäle repräsentiren.

Zur Erleichterung der nachfolgenden Betrachtungen, welche die Notwendigkeit einer Zerschneidung klar legen sollen, wollen wir mit Riemann die n-blättrige Fläche als geschlossen, etwa als Kugelfläche annehmen, müssen ihr aber durch Herausnahme eines Punktes aus irgend einem Blatt eine wenn auch noch so kleine Randkurve geben, da man nur auf berandeten Flächen Querschnitte konstruiren kann.

Es sei nun $s = f(z)$ eine algebraische Funktion, definirt durch die Gleichung $F(z, s) = 0$, und T die zu s gehörige, nicht zerschnittene n-blättrige Riemann'sche Kugelfläche in dem eben angedeuteten Sinn, so ist das Integral

$$\varphi(z, s) = \int_{z_0, s_0}^{z, s} f(z)\, dz$$

eine auf der Fläche T eindeutige Funktion der oberen Grenze, wenn

1) das Residuum von $f(z)$ in sämtlichen Punkten von T den Wert null hat und
2) die Fläche T einfach zusammenhängend ist, d. h. so beschaffen, dass jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächenteils bildet.

Diese beiden Bedingungen werden aber im allgemeinen nicht erfüllt sein. Wir denken uns daher zunächst alle Unstigkeitspunkte, in denen $\mathrm{Res} f(z)$ einen von null verschiedenen Wert hat, durch kleine Kreise ausgeschlossen und sodann die daraus resultirende, sicher mehrfach zusammenhängende Fläche durch eine, wie Riemann [1]) nachgewiesen hat, stets gerade Anzahl von nicht zerstückenden Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche T′ verwandelt. Nennen wir mit Riemann die Anzahl der dazu nötigen Querschnitte 2 p, so ist nach seiner Bezeichnungsweise die Fläche T (2p+1)fach zusammenhängend. Diese Zahl 2p lässt sich für irgend eine n-blättrige Kugelfläche T sofort angeben,

[1]) Theorie der Abel'schen Funktionen. I. Abtlg. § 3.

sobald man die Ordnungen sämtlicher Windungspunkte kennt; es ist nämlich

$$2\,p = w - 2\,n + 2,$$

wo w die Summe der Ordnungen aller Windungspunkte bedeutet[1]). Ist die Funktion $f(z)$ so beschaffen, dass die Bedingung 1) schon erfüllt ist, wie dies z. B. bei dem elliptischen Integral erster Gattung der Fall ist, so hat man die Fläche T direkt in die einfach zusammenhängende T′ zu verwandeln.

In dieser ganzen Fläche T′ ist nun das Integral φ eine eindeutige Funktion der oberen Grenze; denn berechnet man dasselbe auf irgend zwei verschiedenen Wegen I und II, so bilden diese beiden Wege zusammen stets eine geschlossene Kurve K, welche einen Flächenteil vollständig begrenzt, und längs deren das Integral $\int f(z)\,dz$ den Wert null hat. Es besteht daher die Gleichung:

$$\underset{\text{I}}{\int_{z_0,s_0}^{z,s}} + \underset{\text{II}}{\int_{z_0,s_0}^{z,s}} = 0 \text{ oder } \underset{\text{I}}{\int_{z_0,s_0}^{z,s}} = \underset{\text{II}}{\int_{z_0,s_0}^{z,s}}$$

Bedeuten (z_1, s_1) und (z_2, s_2) zwei zu beiden Seiten eines Querschnitts einander unendlich nahe liegende Punkte, so dass also die beiden Wertsysteme (z_1, s_1) und (z_2, s_2) unendlich wenig von einander verschieden sind, und bildet man in der Fläche T′ die Integrale $\varphi(z_1, s_1)$ und $\varphi(z_2, s_2)$, so ergibt sich:

$$\varphi(z_2, s_2) - \varphi(z_1, s_1) = \int_{z_1,s_1}^{z_2,s_2} f(z)\,dz,$$

und dabei hat das Integral rechter Hand an allen Stellen des Querschnittes ein und denselben konstanten Wert A, welchen man den zu dem betreffenden Querschnitt gehörigen *Periodizitätsmodul* nennt. Betrachten wir jetzt die Funktion φ in der nicht zerschnittenen Fläche T, so muss sie nach dem eben Gesagten beim Überschreiten eines Querschnittes eine Unstetigkeit erleiden und von $\varphi(z_1, s_1)$ zu $\varphi(z_1, s_1) \pm A$ überspringen, wo das positive oder negative Zeichen gilt,

[1]) Ebendaselbst § 7.

je nachdem man den Querschnitt von der einen oder von der andern Seite passirt. Ganz dasselbe findet für jeden Querschnitt statt, so dass, wenn man φ für einen beliebigen Punkt (z, s) der Fläche T auf irgend zwei Wegen berechnet, die beiden so erhaltenen Werte von φ sich nur um eine Summe von der Form

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots .$$

unterscheiden können, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ganze, positive oder negative Zahlen und $A_1, A_2, \ldots$ die Periodizitätsmoduli der überschrittenen Querschnitte darstellen. Jedes Integral φ einer algebraischen Funktion $f(z)$, der eine mehrfach zusammenhängende Fläche zu Grunde liegt, ist also eine unendlich vieldeutige Funktion der oberen Grenze, und daraus folgt, dass die inverse Funktion z eine periodische Funktion von φ sein muss.

Die Zahl p, welche den Zusammenhang der zur Funktion s gehörigen Fläche T angibt, nimmt aber nicht nur in der Funktionentheorie, sondern überhaupt in der Mathematik, in der Analysis wie in der Geometrie, eine hervorragende Stellung ein. Denn wie Clebsch[1]) nachgewiesen hat, ist dieselbe identisch mit derjenigen Grösse, welche nach ihm als „*Geschlecht*“, nach Cayley als „*Defekt*“ der algebraischen Kurve $F(z,s)=0$ bezeichnet wird[2]), und die den Überschuss der dieser Kurve zukommenden Maximalzahl von Doppelpunkten und Rückkehrpunkten über die Anzahl der wirklich vorhandenen angibt, so dass demnach die Gleichung besteht:

$$p=\frac{(k-1)(k-2)}{2}-d-r$$

wo k die Ordnung der Kurve $F = 0$, d die Anzahl ihrer Doppelpunkte und r die ihrer Rückkehrpunkte bedeutet.

Zwei Beispiele, von denen das eine in der Theorie der Abel'schen Funktionen, das andere in der Lehre von den Differentialgleichungen seine Verwendung findet, mögen als

[1]) Ueber die Anwendung der Abel'schen Funktionen in der Geometrie. Borchardts Journal Bd. 63 (1864) pg. 189. Siehe auch Clebsch: Vorlesungen über Geometrie pg. 351.

[2]) Salmon: Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven (deutsch bearb. v. Fiedler). II. Aufl. Leipzig 1882 pg. 39.

Beleg für die enorme Fruchtbarkeit dieses Begriffes dienen. Es sei hier zum voraus bemerkt, dass im Folgenden der Buchstabe $\Re$ ausschliesslich als Symbol einer rationalen Funktion benützt wird.

Wir betrachten das Integral

$$\int \Re (z, s)\, dz$$

für den Fall, dass die Kurve $F(z,s) = 0$ vom Geschlecht 0 oder 1 sei.

Im ersten Fall, d. h. wenn $F = 0$ eine *Unicursalkurve* darstellt, lassen sich z und s als rationale Funktionen eines Parameters t ausdrücken [1]), etwa in der Form:

$$z = \Re_1(t) \qquad s = \Re_2(t) \qquad dz = \Re_3(t)\, dt,$$

$$\text{woraus folgt: } \int \Re(z,s)\, dz = \int \Re_4(t)\, dt,$$

Zur Auswertung des Integrales rechter Hand genügen aber die Logarithmen und die Kreisfunktionen.

Ist speziell $F \equiv s^2 - a z^2 - b z - c = 0$,
so hat p stets den Wert null; es fallen also in die obige Klasse von Integralen unter anderm alle von der Form

$$\int \Re (z, \sqrt{a z^2 + b z + c})\, dz$$

Im zweiten Fall dagegen, wenn die Kurve $F = 0$ vom Geschlecht 1 ist, lassen sich z und s als rationale Funktionen eines Parameters t und der Grösse $\sqrt{G(t)}$ ausdrücken, wo G (t) eine ganze Funktion dritten oder vierten Grades von t bedeutet. Durch passende lineare Transformation kann $\sqrt{G(t)}$ immer auf die Form $\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}$ gebracht werden, so dass, wenn man $t = s n u$ setzt, z und s sich als rationale Ausdrücke elliptischer Funktionen darstellen lassen [2]). Gemäss der ersten Parameterdarstellung möge sich etwa ergeben:

$z = \Re_1 (t, \sqrt{G(t)})$, $s = \Re_2 (t, \sqrt{G(t)})$, $dz = \Re_3 (t, \sqrt{G(t)})\, dt$,
dann ist $\int \Re (z, s)\, dz = \int \Re_4 (t, \sqrt{G(t)})\, dt$.

Diese letzteren Integrale können aber stets mit Hülfe elliptischer Integrale ausgeführt werden.

[1]) Salmon: l. c. pg. 39

[2]) Clebsch: Ueber diejenigen Kurven, deren Coordinaten sich als elliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen. Borchardts Journal Bd. 64 (1865) pg. 21) und Salmon: l. c. pg. 412.

Hat man also die Funktionen $\Re_1$ und $\Re_2$ gefunden, so darf damit auch die Berechnung dieser beiden grossen Klassen von Abel'schen Integralen als erledigt betrachtet werden.

Nun gelten aber auch die Umkehrungen obiger Sätze: Wenn sich die Koordinaten eines Punktes der Kurve $F = 0$ als rationale Funktionen von t resp. t und $\sqrt{G(t)}$ darstellen lassen, so ist dieselbe vom Geschlecht 0 [1]) resp. vom Geschlecht 1 [2]). Diese beiden Sätze führen uns auf das zweite Beispiel, das sich auf die Integration der Differentialgleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

bezieht. Soll das Integral u dieser Differentialgleichung eine eindeutige Funktion von z sein, so sind, wie Briot und Bouquet [3]) nachgewiesen haben, bloss folgende drei Fälle möglich: entweder ist das Integral u rational, oder es ist einfach periodisch, und daher gleich einer rationalen Funktion von $tg\frac{\pi z}{w}$, wenn man mit w die Periode bezeichnet; oder es ist doppeltperiodisch und daher gleich einer rationalen Funktion von t und $\sqrt{G(t)}$, wo $\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = G(t)$ und G wieder eine ganze Funktion dritten oder vierten Grades bedeutet. Das eindeutige Integral u kann daher nur in folgenden drei Formen auftreten:

1) $u = \Re(z)$, woraus $\frac{du}{dz} = \Re_1(z)$

2) $u = \Re\left(tg\frac{\pi z}{w}\right)$, „ $\frac{du}{dz} = \Re_1\left(tg\frac{\pi z}{w}\right)$

3) $u = \Re(t, \sqrt{G(t)})$, „ $\frac{du}{dz} = \Re_1(t, \sqrt{G(t)})$

Setzt man nun mit Briot und Bouquet $\frac{du}{dz} = U$, und fasst

[1]) Salmon: l. c. pg. 40.

[2]) Clebsch: Vorlesungen über Geometrie pg. 911.

[3]) Mémoire sur l'intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques. Journal de l'Ecole Polytechnique. T. 21 (1856) pg. 199.

man die vorgelegte Differentialgleichung $F(u, U) = 0$ als algebraische Kurve auf mit den Koordinaten u und U, so ist mit Berücksichtigung obiger Sätze evident, dass dieselbe bloss vom Geschlecht 0 oder 1 sein kann.

Man wird daher beim Studium einer solchen Differentialgleichung vor allem die der Kurve $F(u, U) = 0$ zukommende Zahl p bestimmen. Ist $p < 2$, so weiss man schon zum voraus, dass das Integral u eine eindeutige Funktion von z ist; ergibt sich $p = 0$, so ist u entweder eine rationale oder eine einfach periodische Funktion von z; für $p = 1$ muss u eine doppeltperiodische Funktion von z sein. Findet man dagegen für p einen Wert, der grösser als 1 ist, so ist damit der Beweis erbracht, dass die vorgelegte Differentialgleichung durch eindeutige analytische Funktionen nicht integrirbar ist.

Was nun die Grundanschauungen Riemanns betrifft, auf die sich seine Funktionentheorie aufbaut, so haben nach der Ansicht des Herrn F. Klein[1]) physikalische Gesichtspunkte auf dieselben eingewirkt; nicht als ob Riemann in physikalischen Betrachtungen Beweise für mathematische Wahrheiten gesucht hätte, wohl aber mochte er darin eine heuristische Methode für seine funktionentheoretischen Spekulationen gefunden haben.

Da nämlich der reelle und der imaginäre Teil einer jeden Funktion $w = u + i\,v$ eines komplexen Argumentes den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad 1)$$

genügen, und somit auch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 2)$$

erfüllt ist, so kann man (vermöge der Gleichung 2) u stets als Geschwindigkeitspotential für eine stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einer Ebene deuten[2]).

[1]) Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig 1882. Die nachfolgenden Betrachtungen sind fast ausschliesslich dieser Schrift entnommen, doch soll nicht jedesmal besonders darauf verwiesen werden.

[2]) Kirchhoff: Vorlesungen über mathematische Physik (Mechanik) Leipzig 1876, pg. 273.

Die Kurven u = const stellen dann die Niveaukurven dar, während die Kurven v = const, welche wegen der Gleichungen 1) die Kurven u = const überall orthogonal durchsetzen, die Strömungskurven bilden. Dem entsprechend gestatten auch die für die Funktion w ausgezeichneten Punkte z eine physikalische Interpretation. So ist z. B. in einem Nullpunkt von $\frac{dw}{dz}$, wo also auch $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ verschwinden, die Geschwindigkeit $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ der Strömung gleich null, d. h. es muss daselbst eine Stauung eintreten. Oder bezeichnet man mit z_0 einen logarithmischen Unendlichkeitspunkt von w, in dessen Umgebung w sich in der Form

$$A \lg (z - z_0) + A_0 + A_1 (z - z_0) + A_2 (z - z_0)^2 + \ldots\ldots$$

darstellen lässt, so bilden, wenn *A reell* ist, die Niveaukurven in der Nähe von z_0 kleine konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt z_0 und daher die Strömungskurven ein Strahlenbüschel mit der Spitze in z_0; somit befindet sich in z_0 „*eine Quelle von einer gewissen positiven oder negativen Ergibigkeit*“. Letztere besitzt, wie eine einfache Rechnung lehrt, den Wert $2A\pi$ und wird also gemessen durch das Residuum der Funktion w im Punkt z_0. Ist dagegen *A rein imaginär*, so umgeben umgekehrt die Strömungskurven den Punkt z_0 mit kleinen Kreisen, während die Niveaukurven von z_0 aus nach allen Richtungen verlaufen. Es wirbelt daher die Flüssigkeit um z_0 herum, weshalb Klein in diesem Fall den Punkt z_0 einen „*Wirbelpunkt*“ nennt. Bei komplexem A kann man die entsprechende Strömung auffassen als entstanden aus einer Kombination der beiden eben beschriebenen Bewegungsarten.

Dem Vorigen analog, lassen auch algebraische Unstetigkeitspunkte beliebig hoher Ordnung physikalische Interpretationen zu, so dass man schliesslich im stande ist, auch für einen Punkt z_0, in welchem w unendlich wird wie der Ausdruck

$$A \lg (z - z_0) + \frac{B_1}{z - z_0} + \frac{B_2}{(z - z_0)^2} + \ldots\ldots + \frac{B_n}{(z - z_0)^n},$$

unter Annahme einer Kombination der einzelnen Strömungen die physikalische Erklärung zu geben.

Nach dem, was wir früher gesehen haben, gibt es auf jeder Fläche unendlich viele orthogonale Kurvensysteme, und daher kann man jede beliebige Fläche als Träger der unabhängigen Veränderlichen $x + i y$ ansehen. Jede Funktion $u + i v$ von $x + i y$ genügt auch in diesem Falle den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

und repräsentirt somit auf der betreffenden Fläche eine gewisse stationäre Strömung, zu welcher das Geschwindigkeitspotential u gehört.

Hat man auf diese Weise aus den Funktionen komplexer Argumente die physikalischen Vorgänge herauslesen können, und bedenkt man, dass nicht nur jede Funktion eines komplexen Argumentes durch eine gewisse stationäre Strömung veranschaulicht wird, sondern ebenso jede stationäre Strömung in mathematischer Einkleidung eine gewisse Funktion eines komplexen Argumentes repräsentirt, so liegt es in der Tat nahe, das Studium der Strömung an die Spitze zu stellen und zu sehen, wie die aus rein physikalischen Betrachtungen gewonnenen Resultate für die Funktionentheorie passende Verwertung finden. Derart ungefähr möchte nach Kleins Ansicht der Weg gewesen sein, auf welchem Riemann in die Funktionentheorie eingedrungen ist.

Diese Methode der Forschung verlangt vor allem die experimentelle Realisirung einer den Typen

$$A \lg \frac{z - z_0}{z - z_1}\ ^{1)} \text{ und } \frac{A}{(z - z_0)},$$

---

[1]) Es empfiehlt sich nämlich, den Typus $A \lg (z - z_0)$ durch $A \lg \frac{z - z_0}{z - z_1}$ zu ersetzen, weil hier die Unstetigkeitspunkte z_0 und z_1 beide im Endlichen liegen.

entsprechenden stationären Strömung, wozu man sich am zweckmässigsten des elektrischen Fluidums bedient.

Was den ersten Typus betrifft, so müssen bei reellem A in z_0 und z_1 Quellpunkte vorhanden sein; man hat daher auf der X Y - Ebene, die man sich mit einer dünnen, gleichmässigen Schicht eines elektrischen Leiters bedeckt denkt, in z_0 und z_1 die beiden Pole einer galvanischen Batterie anzusetzen, und zwar muss die Stärke des Poles in z_0 so gewählt sein, dass die Ergibigkeit der Quelle in z_0 den Wert $2A\pi$ erlangt. Dann ist aber auch diejenige der Quelle in z_1 bestimmt; sie muss nämlich, da die Strömung eine stationäre sein soll, $-2A\pi$ betragen. Hier sieht man also aus physikalischen Gründen unmittelbar ein, weshalb die Summe der Residuen verschwindet; es muss eben, sofern die Strömung stationär bleiben soll, durch den einen Pol gerade so viel Fluidum zugeführt werden, als durch den andern ausströmt.

Wenn dagegen A rein imaginär ist, kann man sich schematisch die Strömung dadurch hergestellt denken, dass man irgend eine z_0 und z_1 verbindende, sich selbst nicht schneidende Kurve als Sitz einer konstanten elektromotorischen Kraft betrachtet[1]). Die so hervorgebrachte Bewegungsform besitzt tatsächlich in z_0 und z_1 Wirbelpunkte, und das zugehörige Geschwindigkeitspotential, d. h. der reelle Teil der diese Strömung repräsentirenden Funktion $f(z)$ macht beim Überschreiten der Kurve $z_0 z_1$ einen für alle Punkte derselben konstanten Sprung und wächst bei jeder Umkreisung von z_0 oder z_1 um dieselbe konstante Grösse. Hieraus erkennt man, dass jene Kurve $z_0 z_1$ in der Funktionentheorie als Querschnitt und die längs derselben konstante Potentialdifferenz als der zu diesem Querschnitt gehörige Periodizitätsmodul auftritt.

Eine dem zweiten Typus $\frac{A}{(z - z_0)}\lambda$ entsprechende Bewegungsform kann ebenfalls mit einer gewissen Annäherung durch das Experiment erzielt werden.

---

[1]) Zur experimentellen Anordnung dieses Schemas bedient sich Klein thermoelektrischer Ströme.

Sollte aber Riemann diese heuristische Methode, welche sich ihm in der Physik darbot, wirklich mit Erfolg angewandt haben, so musste er notwendig auch auf solchen Flächen stationäre Strömungen einleiten können, welche ein Studium der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale in geschickter Weise auf sich zulassen. Für die gewöhnliche, mehrblättrige Riemann'sche Fläche wäre dies allerdings unmöglich, da dieselbe wohl gedacht, aber nicht konstruirt werden kann und somit in Wirklichkeit gar nicht existirt. Allein wie aus einer Äusserung des Herrn Prym[1]) hervorgeht, sind die Riemann'schen Flächen ursprünglich durchaus nicht notwendig mehrblättrige Flächen über der Ebene, vielmehr kann man Funktionen des Ortes auch auf beliebigen krummen Flächen studiren, auf denen stationäre Strömungen wirklich realisirbar sind. In der Tat sind bei diesen rein spekulativen Betrachtungen, wo es sich bloss darum handelt, aus physikalischen Erscheinungen Haupteigenschaften der Funktionen und ihrer Integrale herauszulesen, alle diejenigen geschlossenen Flächen als gleichbedeutend aufzufassen, welche unter sich in eindeutiger Verwandtschaft stehen. Dies gilt z. B. von der gewöhnlichen zweiblättrigen Riemann'schen Fläche mit vier Verzweigungspunkten und von der Ringfläche, welche sich beide eindeutig auf einander beziehen lassen. Denkt man sich dieser letzteren durch Herausnahme eines Punktes einen Rand gegeben, so erkennt man, dass ihr Zusammenhang dreifach, also derselbe ist, wie derjenige der zugehörigen Riemann'schen Fläche, dass somit die Zahl p ungeändert erhalten bleibt. Dies ist nun ein Satz, der überhaupt ganz allgemein jeder eindeutigen Transformation zukommt[2]); es besteht sogar, wie Herr Jordan[3]) nachgewiesen hat, auch die Umkehrung desselben, wonach es stets möglich ist, zwei Flächen mit gleichem p eindeutig auf einander zu beziehen. Da somit für die in Betracht kommenden Zwecke zwei Flächen mit gleichem p als äquivalent anzusehen sind,

[1]) Klein: l. c. pg. IV.

[2]) Clebsch und Gordan: l. c. pg. 53 und 54.

[3]) Sur la déformation des surfaces. Journal des mathématiques pures et appliquées. II Série. Tome XI. (1866) pg. 105.

so konstruirt sich Herr Klein für jedes p eine möglichst einfache typische Fläche, die sogenannte *„Normalfläche“*, und versteht unter einer Normalfläche vom Zusammenhang $(2p + 1)$ eine Kugelfläche mit p „Handhaben“. Dass man eine solche Fläche wirklich durch $2p$ nicht zerstückende Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandeln kann, ist unmittelbar einzusehen. Man hat zunächst jeder Handhabe durch Herausnahme eines Punktes einen Rand C zu verleihen, hierauf legt man durch C um jede Handhabe eine Meridiankurve L als Querschnitt und ebenso eine Breitenkurve B, welche von einem Uferpunkt je eines Meridians L bis zu dem gegenüberliegenden Punkt führt. Die so zerschnittene Fläche T′ ist einfach zusammenhängend, denn jede weitere geschlossene Linie auf T′ bildet die vollständige Begrenzung eines Flächenteiles.

Solche Flächen eignen sich nun ausgezeichnet zur Realisirung von Strömungen. Denkt man sich wieder die Normalfläche T′ mit einer gleichmässigen, dünnen Schicht eines elektrischen Leiters belegt, und betrachtet man jede der $2p$ geschlossenen Kurven L, B als Sitz einer für jede Kurve beliebig gewählten, aber konstanten elektromotorischen Kraft, so resultirt hieraus eine Strömung, welche weder Quellpunkte noch Wirbelpunkte aufweist und daher von Klein als eine *„überall endliche Strömung“* bezeichnet wird. Die zugehörige Funktion des Ortes ist also eine überall endliche Funktion, die $2p$ Periodizitätsmoduli besitzt und daher unendlich vieldeutig ist.

Dies ist aber nichts anderes als das von Riemann aus dem Dirichlet'schen Minimum-Prinzip abstrahirte erste Existenz-Theorem, welches N e u m a n n [1]) folgendermassen formulirt:

Es existirt stets eine Funktion $f(z)$, welche den beiden Bedingungen genügt:

I. $f(z)$ soll auf $\mathfrak{R}$ [2]), abgesehen von den $2p$ Kurven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, eindeutig und stetig sein.

II. $f(z)$ soll in jenen Kurven $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ mit konstanten

[1]) Vorlesungen üb. Riemanns Theorie der Abel'schen Integrale. II. Aufl. (1884) pg. 238. [2]) $\mathfrak{R}$ bedeutet eine $(2p + 1)$ fach zusammenhängende, willkürlich konstruirte Riemann'sche Kugelfläche.

Differenzen behaftet sein, deren reelle Teile vorgeschriebene Werte besitzen."

Beachtet man noch, dass jede Funktion, welcher diese Eigenschaft zukommt, ein Abel'sches Integral erster Gattung ist, so ist damit die Existenz dieser letzteren nachgewiesen.

Physikalisch ist jetzt auch sofort evident, warum es auf einer einfach zusammenhängenden Fläche, wo also $p = 0$ ist, keine überall endlichen Funktionen geben kann. Weiterhin ergibt sich die Bedeutung der Zahl p als die grösste Anzahl der überall endlichen, von einander linear unabhängigen Ortsfunktionen, und damit ist man unter Berücksichtigung des oben Gesagten auf den Satz geführt, dass auf einer $(2p+1)$ fach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche stets p von einander linear unabhängige Integrale erster Gattung existiren.

Aus diesen wenigen und knappen Andeutungen mag man schon zur Genüge ersehen, welchen Vorteil ein solches heuristisches Hilfsmittel demjenigen bieten kann, der es richtig zu verwerten weiss.

Werfen wir noch einmal einen Rückblick auf die Definitionen, welche Cauchy und Riemann dem Funktionsbegriff zu Grunde gelegt haben, so ist es bei beiden dieselbe Differentialgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x},$$

welche den Begriff der Funktion charakterisirt. Indessen ist diese Art und Weise, Funktionen eines komplexen Argumentes zu definiren, keineswegs einwandsfrei. Man weiss, dass nicht jede Funktion eines oder mehrerer Argumente differenzirbar ist; auch lassen sich die Bedingungen für die Differenzirbarkeit gar nicht angeben, vielmehr muss dieselbe als eine besondere Eigenschaft gewisser Funktionen angesehen werden; sodann wird man es kaum als naturgemäss bezeichnen können, einen so wichtigen Begriff mit Hülfe eines anderen Begriffs zu definiren, der sich selbst wiederum nur aus dem ersteren entwickeln konnte und auch entwickelt hat.

Diese Gründe mögen Herrn Weierstrass mit dazu bewogen haben, von den bisherigen Definitionen des Funktionsbegriffs abzuweichen und denselben im Anschluss an die allgemeine Arithmetik von neuem systematisch aufzubauen.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 5

1) Entwicklung des Funktionsbegriffs bis zur Dirichlet'schen Nominaldefinition unter Zugrundelegung reeller Argumente . . 7

2) Einführung der imaginären Zahlen.

a. Die gewöhnlichen komplexen Zahlen 14

b. Die aus zwei und mehr willkürlichen Haupteinheiten zusammengesetzten komplexen Zahlen (höhere komplexe Zahlen) 21

3) Funktionen komplexer Argumente.

a. Ältere Periode (Moivre, Bernoulli Euler, Lagrange, Gauss) 28

b. Begründung der Theorie der Funktionen komplexer Argumente durch Cauchy und ihre Bedeutung für den damaligen Stand der Analysis 35

c. Grundlagen der Riemann'schen Funktionentheorie mit besonderer Berücksichtigung der physikalischen Gesichtspunkte, die nach Kleins Ansicht bestimmend auf den Ideengang Riemanns eingewirkt haben 46